Charles Georges J. L. Várhidy

DESENHO GEOMÉTRICO: UMA PONTE ENTRE A ÁLGEBRA E A GEOMETRIA

Resolução de Equações pelo Processo Euclidiano

Universidade Federal de Ouro Preto
2010

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é o produto final da dissertação de mestrado em Educação Matemática, defendida na Universidade Federal de Ouro Preto em julho de 2010. É fruto de pesquisa informal junto a alunos do Ensino Fundamental e Médio e pesquisa profissional junto a professores de Matemática de uma escola de Belo Horizonte. Essa pesquisa teve motivação pela constatação das dificuldades que os alunos vêm tendo no aprendizado não só de Geometria mas também da Álgebra, fato observado não só pelo nosso dia-a-dia, nas aulas de Matemática, mas também por muitos Educadores, conforme pode ser verificado em diversos trabalhos por eles publicados. Ademais, os anos de labuta ministrando aulas de Desenho Geométrico em escolas estaduais e particulares, contribuíram para motivar essa iniciativa. Eram tempos em que a matéria era obrigatória nas escolas estaduais e particulares e constatava-se, facilmente, um melhor rendimento, por parte dos alunos, no estudo da Matemática. Ela dava ao estudante instrumentos eficientes para desenvolver seu raciocínio lógico e a capacidade de análise. A respeito, vários matemáticos e educadores sobejamente já escreveram

Trata-se, pois, de uma alternativa plausível para instrumentalizar o professor de Matemática (e de Geometria) no seu ofício, oferecendo ao aluno, igualmente, uma oportunidade concreta de entender como podemos, com o simples uso de régua e compasso resolver problemas que, aparentemente, só com a álgebra é possível.

E, de quebra, mostrar mais uma serventia importante da Geometria...

De onde eu estou eu enxergo bem longe;
Você, que ainda é pequeno,
não consegue ver o que eu vejo.
Mas se você quiser subir nos meus ombros,
enxergará muito mais longe do que eu.
E aí você poderá me contar o que está vendo.

H. Jackson Brown Jr.

A todos aqueles que contribuíram e contribuem
para engrandecimento do Desenho Geometrico

SUMÁRIO

Capítulo 1. Construções Fundamentais

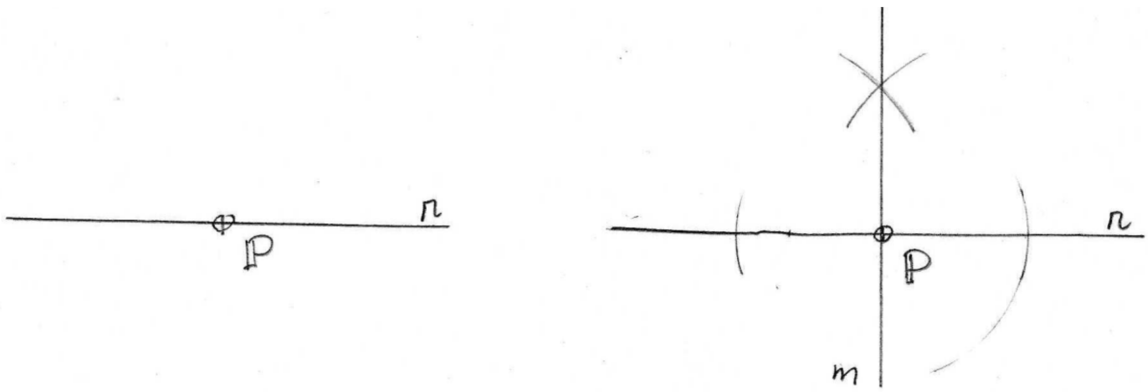
ATIVIDADE: Construção de Perpendiculares e Paralelas; Construção de Ângulos; Transporte de Ângulos e Segmentos.
COMENTÁRIOS: As Construções de Perpendiculares e de Paralelas, e de Ângulos, além de ter habilidade no transporte de segmentos, são essenciais para resolver problemas com desenho geométrico.

a) Perpendiculares

a.1: Perpendicular a uma reta, por um ponto pertencente a ela:

Exemplo: Dada a reta r e o ponto P, conduza, por P, uma perpendicular a r.
Roteiro:

1º: centro do compasso no ponto P, raio qualquer, → pontos A e B em r;
2º: centro do compasso em A, depois em B, raio qualquer, mas maior que AP, → ponto C, acima ou abaixo de r;
3º: ligando P e C, temos a reta s, $\perp$ a r.



R: m $\perp$ r.

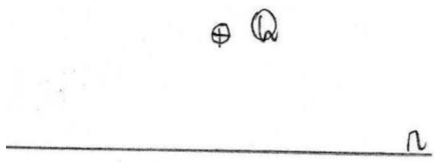
a.2: Perpendicular a uma reta, por um ponto exterior a ela:

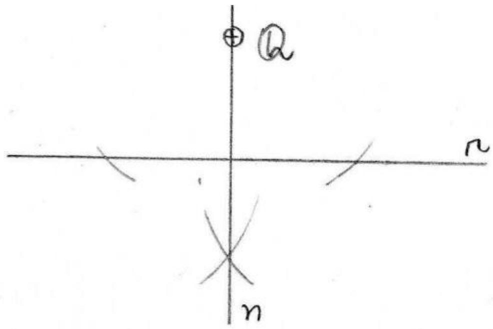
Exemplo: Dada a reta r e o ponto Q, conduza por Q uma perpendicular a r.
Roteiro:

1º: centro do compasso em Q. raio qualquer, mas maior que a distância de Q a r, → pontos A e B em r;

2º: centro do compasso em A, depois em B, eventualmente com o mesmo raio, → ponto C no lado oposto ao de Q, em relação a r;

3º: ligando Q e C, temos a reta s, $\perp$ a r.





R: n $\perp$ r.

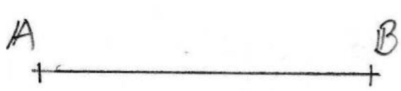
a.3: Mediatriz de um segmento (LG – 1)

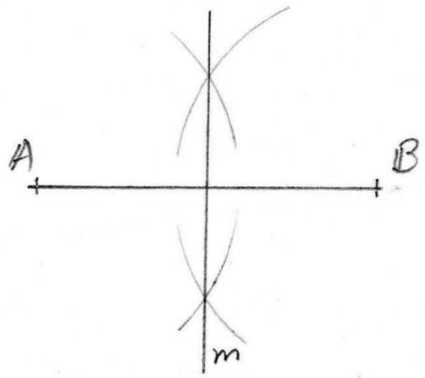
Exemplo: Dado o segmento AB, construa sua mediatriz.

Roteiro:

1º: Centro do compasso em A, depois em B, raio maior que a semidistância entre A e B, → pontos P e Q, em lados alternados do segmento AB;

2º: ligando P e Q temos a reta m, mediatriz de AB.





R: “m”. mtz de AB.

b) Paralelas

b.1. Paralela a uma reta por um ponto dado

Exemplo: Dados r e P, conduza por P uma reta paralela a r.

Roteiro:

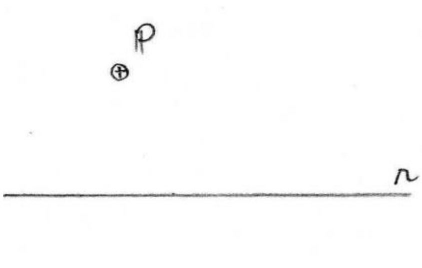
1º: centro do compasso em P, raio maior que a distância de P a r, traçamos um arco prolongado e determinamos A em r;

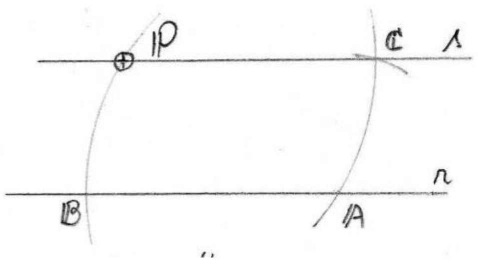
2º: centro do compasso em A, mesmo raio, traçamos um arco simétrico, passando por P e determinando B em r;

3º: transportamos, com o compasso,a distância PB para o primeiro arco, marcando, sobre ele, o ponto C;

4º: ligando C e P, temos a reta p paralela a r.

Obs.: Há outros processos, inclusive o de construção de duas perpendiculares.





R: s // r.

b.2. Paralela a uma reta por uma distância dada

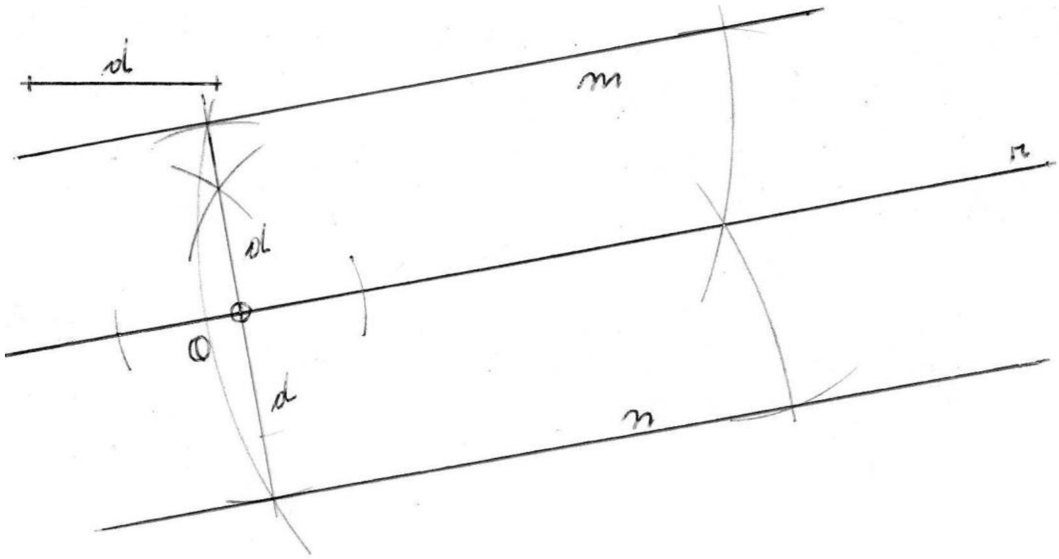
Exemplo: Dada a reta r, e uma distância d, construa as paralelas a r que distem d.

Roteiro:

1º: Por um ponto qualquer de r constrimos uma perpendicular;

2º: transportamos sobre a perpendicular a distancia d → P e Q;

3º: Procedemos, em P e em Q, como no exemplo anterior.



R: m//n//r, dist. D

PROBLEMAS:

1) Dado o triângulo ABC, construa a altura relativa ao lado BC;
2) Dada a reta r, construa as paralelas que distem 3,0 cm de s;
3) Construa um triângulo de lados 4,0, 5,0 e 6,0 cm e determine seu ortocentro (o que é ortocentro?);
4) Construa um retângulo de lados 4,0 e 6,0 cm.

c) Ângulos

c.1: Transporte de ângulos:

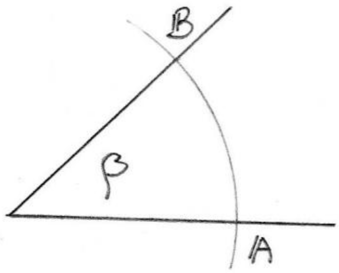
Exemplo: Dado o ângulo β, sobre a semi-reta Or dada.

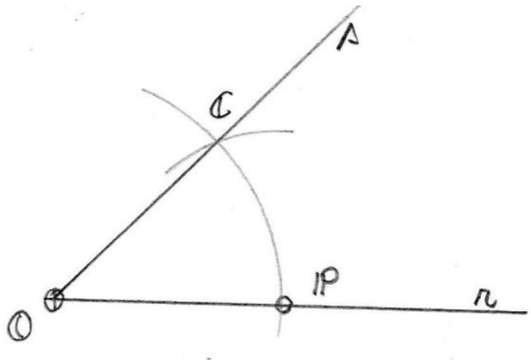
Roteiro:

1º: traçamos dois arcos prolongados quaisquer, porém de mesmo raio, um com centro no vértice de β (marcando A e B sobre os lados) e outro em O;

2º: transportamos, com o compasso, a distância AB sobre o segundo arco, determinando, sobre ele, o ponto C;

3º: ligando C e O temos a semi-reta Os, que forma, com Or, o ângulo β, transportado.





R: CÔP = β

c.2: Construção de ângulos:

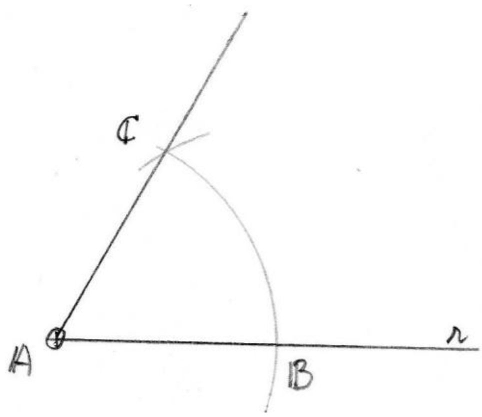
Exemplo 1: Construa um ângulo de 60º.

Roteiro:

1º: Sobre uma semi-reta suporte Ar, com centro em A, construímos um arco prolongado qualquer e marcamos o ponto B;

2º: com o MESMO raio, com centro em B, determinamos o ponto C no primeiro arco;

3º: ligando C com A ou B, temos um ângulo de 60º.



R: CÂB = 60º.

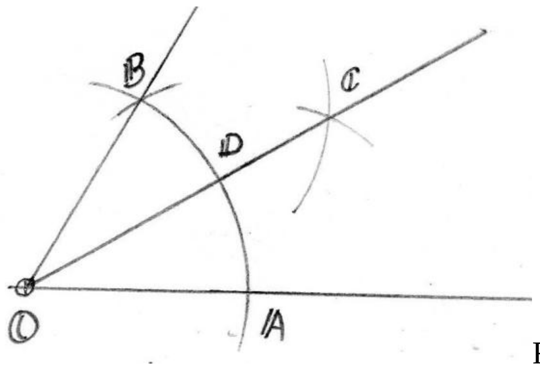
Exemplo 2: Construa um ângulo de 30º

Roteiro:

1º: com centro no vértice (O) do ângulo dado (no caso, de 60º), com raio qualquer, traçamos um arco determinando os pontos A e B nos lados do ângulo;

2º: com centro em A, depois em B, raio maior que a semi-distância entre A e B, determinamos o ponto C;

3º: ligando O e C, temos a bissetriz do ângulo dado, formando dois ângulos congruentes de medidas iguais à sua metade (no caso, dois de 30º).



R: DÔA = 30º.

PROBLEMAS:

1) Dada a semi-reta Am, construa em A um ângulo de 90º e um de 45º;

2) Construa um paralelogramo de lados 4,0 e 6,0 cm e um ângulo interno de 120º;

3) Construa um triângulo eqüilátero cuja mediana (o que é mediana?) mede 5,0 cm.

Capítulo 2. Segmentos Proporcionais

ATIVIDADE: Teorema Linear de Thales; Divisão de Segmento em Partes Proporcionais;

COMENTÁRIOS: Trata-se, basicamente, do processo utilizado, no desenho, para efetuar uma divisão, mormente por um número diferente de potência de dois.

a) Razão de dois Segmentos:

É o quociente de suas medidas, numa mesma unidade de medida.

b) Proporção:

É a igualdade entre duas razões.

c) Proporcionalidade entre Segmentos:

Quatro segmentos são proporcionais quando suas medidas (na mesma unidade) formam uma proporção.

d) Propriedade Fundamental:

"Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios."

e) Teorema Linear de Thales:

"Retas paralelas, cortadas por transversais determinam, sobre estas, segmentos proporcionais entre si."

f) Divisão de um número (ou segmento) em partes diretamente proporcionais:

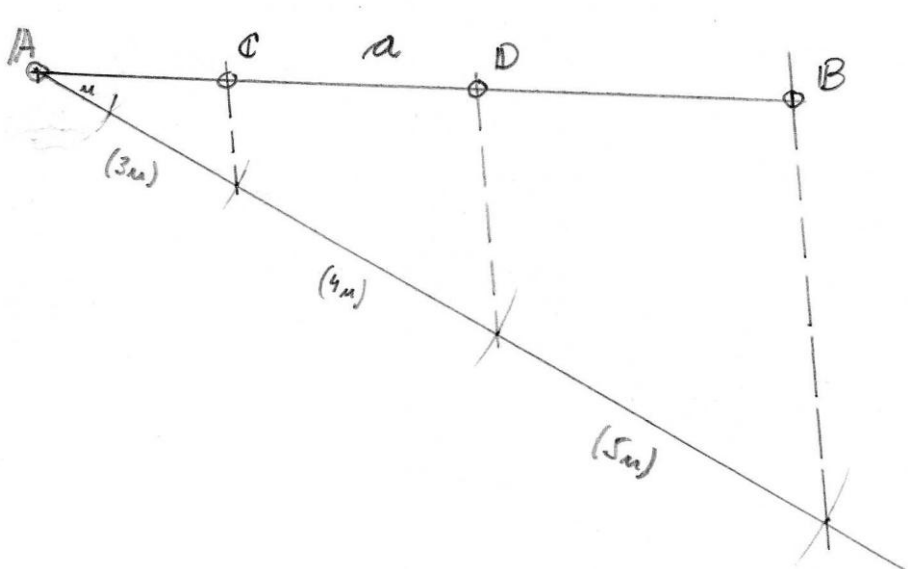
Exemplo: Dado o segmento a, de medida 10,0 cm, divida-o em segmentos diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Roteiro:

1º: traçamos uma semi-reta auxiliar com origem em uma das extremidades do segmento dado a;

2º: Adotamos um segmento unitário (por exemplo u = 1,0 cm) e determinamos, com o compasso, segmentos de 3,0, 4,0 e 5,0 cm sobre a semi-reta auxiliar;

3º: ligamos, com uma reta, as extremidades de a e do último segmento divisor (o de 5,0 cm) e traçamos retas paralelas passando pelas extremidades dos segmentos divisores intermediários, determinando, em a, os segmentos proporcionais.

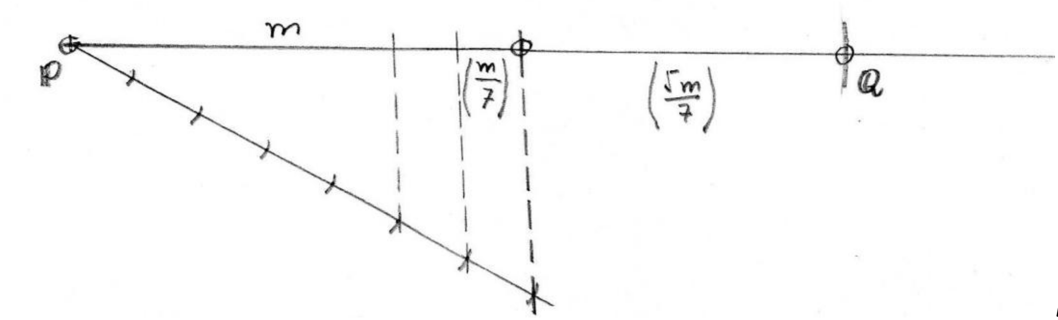


R: AC/3 = CD/4 = DB/5 = AB/12

g) Divisão de um segmento em partes inversamente proporcionais:

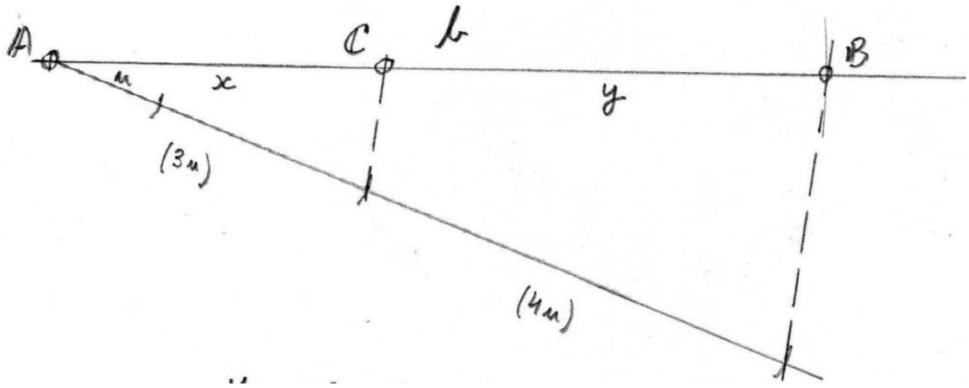
Exemplo: Dado o segmento m, divida-o em partes inversamente proporcionais a 3 e 4 (da proporção $x/\frac{1}{3} = y/\frac{1}{4}$ montada algebricamente, fazemos $3x = 4y = 12.m/7$; Como $12.m/7$ resulta em um segmento b, x e y são obtidos dividindo b por 3 e 4 unidades, respectivamente)

1ª etapa: Determinação de 12m/7= b



b = PQ;

2ª etapa: Divisão de b em 3 e 4 p.p.



R: x/1/3 = y/1/4 = m/7/12.

PROBLEMAS:

1. Divida um segmento de 13 cm em partes diretamente proporcionais a 2, 3, 5 e 7;
2. Divida um segmento de 15,5 cm em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 5, 7 e 9.

Capítulo 3. Quarta e Terceira Proporcionais

ATIVIDADES: Operações aplicando o conceito do Teorema de Thales: Formas direta e sobreposta.

COMENTÁRIOS: É a forma com que a maioria das equações de primeiro grau são resolvidas; Baseiam-se na aplicação do Teorema de Thales após transformar a equação em uma igualdade entre duas razões.

a) Definição:

Chama-se "Quarta Proporcional a três números (ou segmentos)", diferentes de zero, ao número que, com eles, forma uma proporção.

b) Proporção Contínua:

É a proporção que tem meios ou extremos iguais.

c) Determinação Algébrica:

Exemplo: Dados os números a, b e c (nesta ordem), determine x tal que $a/b = c/x$.

Solução: x é determinado resolvendo a equação: $x = b.c/a$

d) Determinação Gráfica (Euclidiana):

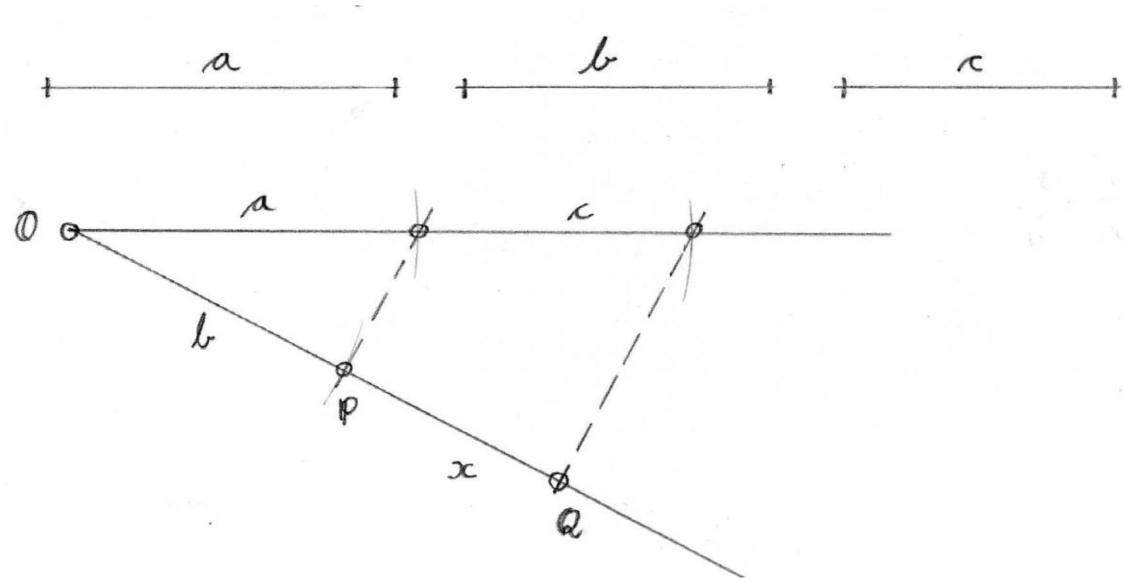
Exemplo: Dados os segmentos a, b e c, determine x tal que $a/b = c/x$.

Roteiro:

1º: transportamos os segmentos, com o compasso, sobre duas semi-retas de mesma origem, MANTENDO A ORDEM DA PROPORÇÃO;

2º: ligamos as extremidades dos segmentos transportados junto à origem;

3º: construímos uma paralela a essa reta passando pela extremidade do terceiro segmento conhecido, determinando, na outra semi-reta, o quarto segmento da proporção.



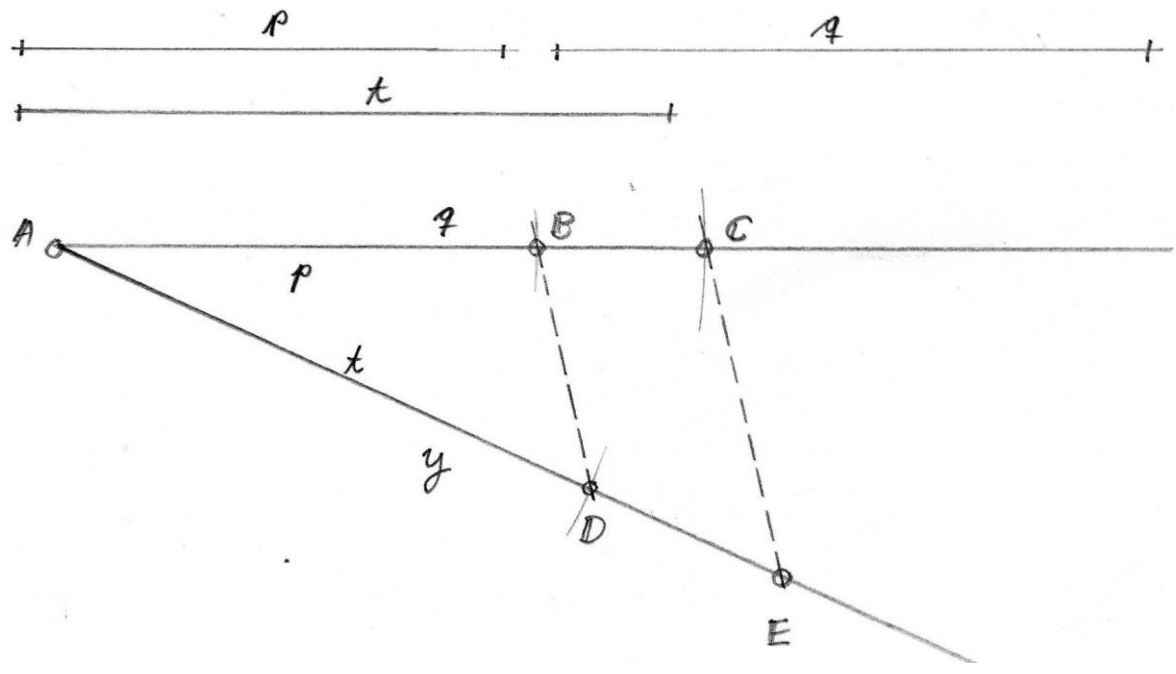
R: a/b = c/x ; x = PQ.

i) Forma Sobreposta:

(Utilizado para economizar espaço ou quando os segmentos têm medidas muito grandes).

Exemplo: Dados os segmentos p, q e t, determine y tal que p/q = t/y.

(A resolução é análoga, exceto pelo fato de todos os segmentos terem extremidades na mesma origem):



R: p/q = t/y; y = AE.

PROBLEMAS:

1) Dados os segmentos m, n e p, determine x tal que $x = m.n/p$;

2) Dados os segmento a e b, determine c tal que $c = a^2/b$;

3) Dados os segmentos a, b, c e d, determine x tal que $x = a.b.c/d^2$.

Capítulo 4. Resolução Euclidiana de Equações do 1º Grau

ATIVIDADES: Transformação Algébrica para a forma de Quarta ou Terceira proporcional e soma de segmentos. Aplicação no Triângulo de Proporcionalidade.

COMENTÁRIOS: As equações de Primeiro Grau sempre podem ser transformadas em uma sequência de quartas ou terceiras proporcionais e soma, subtração, multiplicação ou divisão de segmentos, obtidos de um segmento unitário.

a) Procedimento

Equações de 1º grau são resolvidos por meio de uma ou mais construções de quarta e/ou terceira proporcionais.

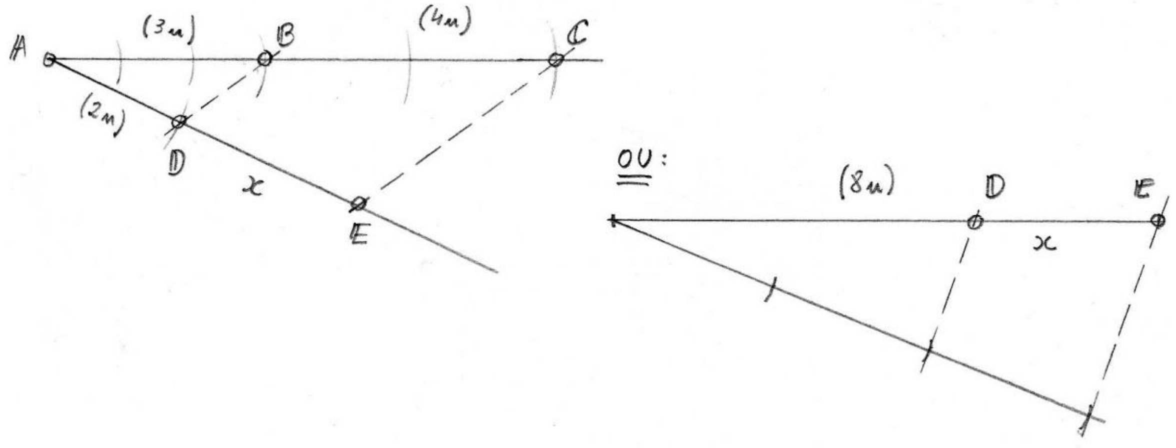
Exemplo 1: Resolva (graficamente): $3.x - 8 = 0$

Roteiro:

1º: "mexemos" na equação para que ela tenha a configuração de uma proporção, isto é, de $3x - 8 = 0$, fazemos $3x = 2.4$, ou, $3/2 = 4/x$;

2º: determinamos x pelo processo descrito da quarta proporcional utilizando segmentos de 2, 3 e 4 unidades (u = 1,0 cm).

OBS.: Dados os valores relativamente pequenos, essa equação também pode ser resolvida (graficamente) dividindo um segmento de 8 unidades por 3.

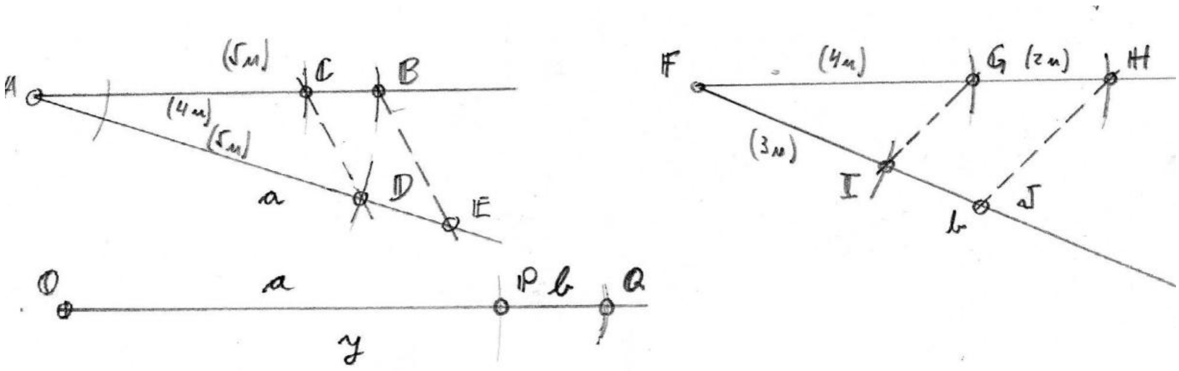


R: x = DE

Exemplo 2: Resolva: 4.y = 31

(Nesse caso, sendo o número um tanto grande e, além disso, primo, resta a alternativa da ***Proporção Reiterada***.) Assim, fazemos a seguinte transformação:

De y = 31/4, vem: y = (25 + 6)/4, de onde vem: y = $5^2/4$ + 2.3/4. Ou seja, chamando de a = $5^2/4$ e de b = 2.3/4, determinamos a e b pela quarta proporcional e, em seguida, somamos os segmentos a e b, obtendo y.



R: y = OQ.

PROBLEMAS:

1) Determine z tal que 5.z – 31 = 5;

2) Determine w de modo que 2w = 43.

Capítulo 5. A Média Geométrica

ATIVIDADES: Relações Métricas no Triângulo Retângulo; Relações que determinam Médias Geométricas; Relação entre secantes e tangentes a uma circunferência, por um ponto não pertencente a ela.

COMENTÁRIOS: O conceito de Média Geométrica, quase sempre obscuro à maioria dos alunos, aqui tem uma luminosidade fantástica. Sua aplicação no Triângulo Retângulo ou na Circunferência tem o condão de fazer-se compreender ao mais dispersivo dos estudantes. Trata-se da aplicação direta na construção de um Triângulo Retângulo (ou na circunferência) a partir de uma equação onde aparece a raiz quadrada de um produto.

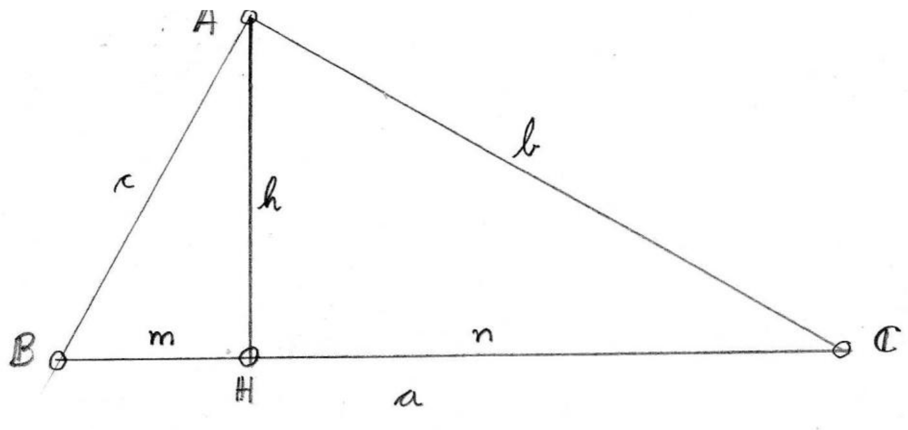
a) Definição

"Média Geométrica, ou Proporcional, entre "n" grandezas é o resultado da raiz enésima do produto dessas grandezas"

(Assim, a MG entre dois números – ou segmentos – é a raiz quadrada do produto entre os dois).

b) Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Em um triângulo retângulo, de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, e altura **h**, essa altura determina, na hipotenusa dois segmentos, **m** e **n**, que são projeções ortogonais dos catetos e determina, também, dois triângulos semelhantes ao primeiro cada um deles tendo como hipotenusa o cateto do primeiro triângulo, e tendo como catetos, além da hipotenusa, suas próprias projeções sobre a hipotenusa.



Dentre as várias relações métricas apresentadas no triângulo retângulo, três delas representam médias geométricas, quais sejam:

I – A altura é MG entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
Ou seja, $h^2 = m.n$;

II – Cada cateto é MG entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.
Ou seja: $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$.

OBSERVAÇÃO: Somando, membro a membro, essas duas últimas relações, obtemos o conhecido Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$...

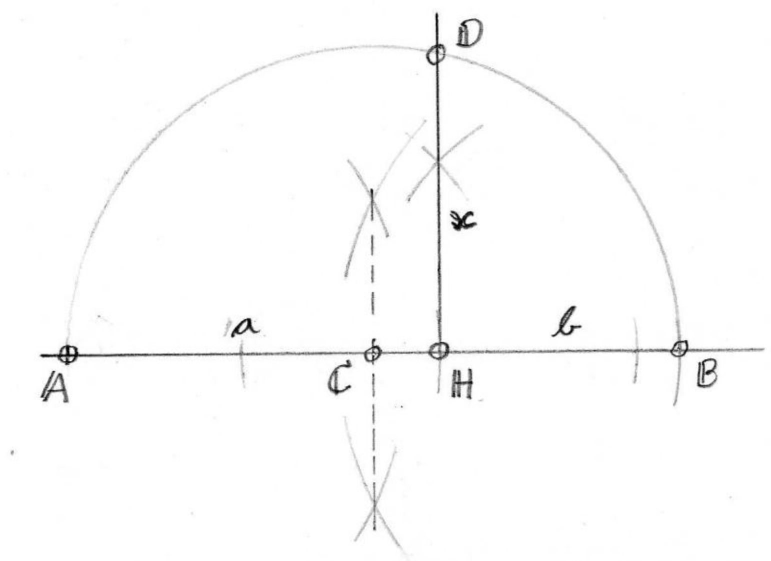
c) Determinação Gráfica

c.1) Processo Aditivo *(utilizado com pequenas grandezas)*

Exemplo: Dados os segmentos a e b, determine a MG entre eles.

Comentário: Sendo a altura de um triângulo retângulo MG entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, e a *soma* dessas projeções a própria hipotenusa, para determinar a MG entre os dois segmentos dados, basta construirmos o triângulo retângulo de hipotenusa (m+n) tendo a altura na junção entre eles.O nome *aditivo* desse processo vem da posição entre os segmentos dados, como se estivessem sendo somados.

Construção:



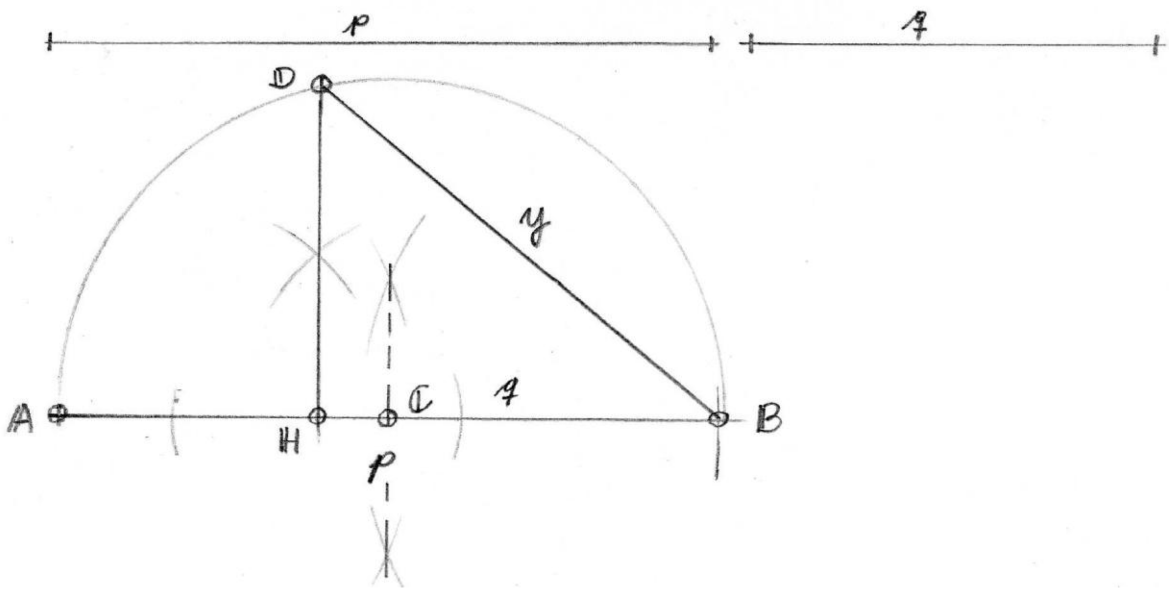
R: x = √ab ***ou*** x é a MG entre a e b.

c.2) Processo Subtrativo (para grandezas maiores)

Exemplo: Dados os segmentos p e q, determine sua MG.

Comentário: Nesse caso é aplicada a relação entre um dos catetos (que é a MG) com a hipotenusa e sua projeção sobre ela. O posicionamento da projeção é *sobre* a hipotenusa, tendo uma das extremidades comuns, como se uma estivesse subtraindo a outra, daí o nome do processo.

Construção:

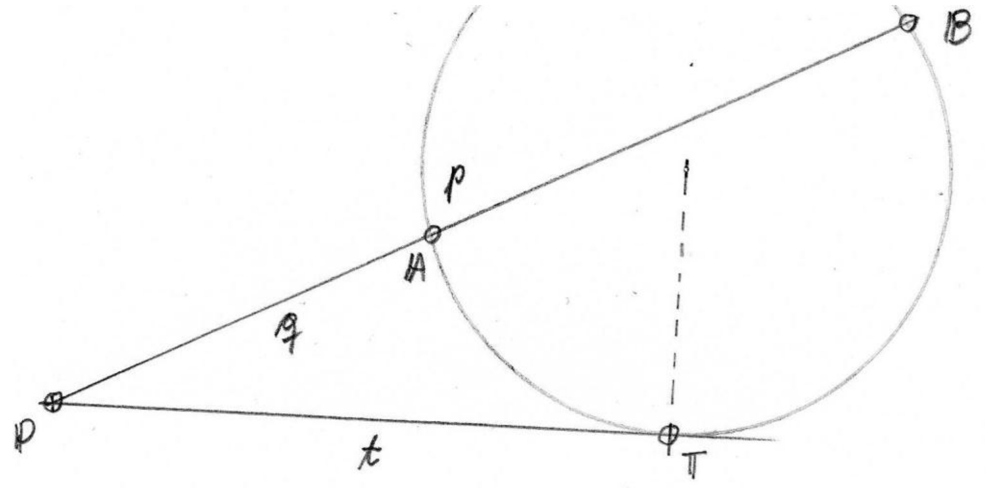


R: y = √pq ou y é a MG entre p e q.

d) A Média Geométrica na Circunferência

d.1) Teorema: *"Dada uma circunferência e um ponto exterior a ela, o segmento entre esse ponto e um dos pontos de tangência é Média Geométrica entre as partes de qualquer segmento secante, com extremidade nesse ponto, compreendendo a parte exterior e a parte inteira".*

Exemplo*:* t^2 = p.q


B
p
A
q
P
t
T

Capítulo 6. Resolução de Equações com Raiz Quadrada

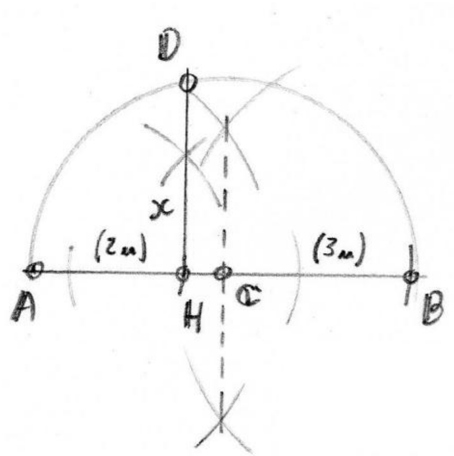
ATIVIDADES: Aplicação do conceito de Média Geométrica obtida nas relações métricas no triângulo retângulo;

COMENTÁRIOS: Complementa o processo apreendido no item anterior. Reforça o conceito de Média Geométrica, tanto entre projeções dos catetos (sobre a hipotenusa) como entre um cateto e sua projeção - Processos Aditivo e Subtrativo.

a) Processo Comum (ou "Da MG")

Exemplo: Determine (graficamente) $x^2 = 6$

Comentário: Sendo 6 = 2.3, e sendo 2 e 3 números pequenos, o mais adequado é aplicarmos o processo aditivo (adotando, naturalmente, um segmento unitário de 1,0 cm).



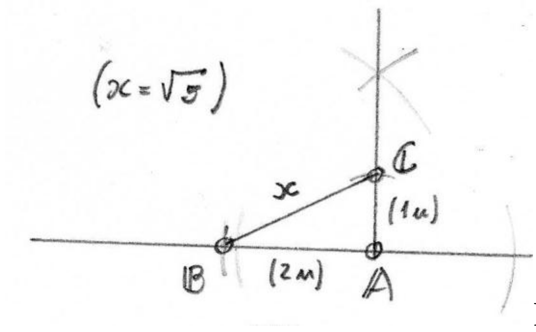
R: x = HD.

b) Processo Simplificado (ou da "Espiral Pitagórica")

Exemplo: Determine $x^2 = 5$

Comentário: Nesse caso os processos da MG são inadequados, já que exigem muitos *passos* de construção e a diferença entre as dimensões das componentes (1 e 5), por ser muito acentuada, aumenta a imprecisão da construção. O melhor é determinar x utilizando o conceito do Teorema de Pitágoras na construção de uma espiral cujo núcleo é $x^2 = 2$. Naturalmente, tendo início onde um dos catetos é o quadrado mais próximo (e inferior) a 5, isto é, 4.

Construção:



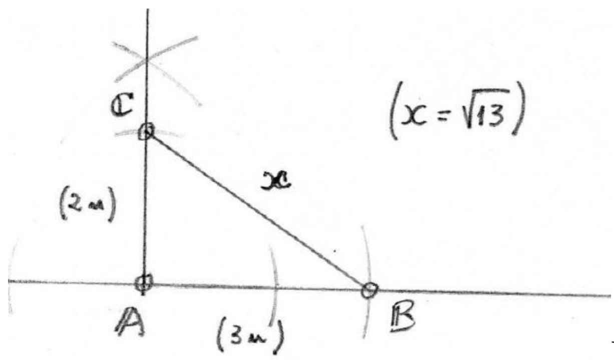
R: x = BC

c) Processo Puro (ou do "Teorema de Pitágoras")

Exemplo: Determine $x^2 = 13$

Comentário: O processo puro sempre pode ser aplicado mas ele é mais adequado quando os outros dois processos não são convenientes dado algum excesso de *passos* de construção. Nesse caso, é utilizada uma modificação na equação: de $x^2 = 13$ vem $x^2 = 9 + 4$, que pode ser escrito como $x^2 = 3^2 + 2^2$. Ou seja, o valor de x é obtido na construção de um triângulo retângulo cujos catetos têm medidas 3 e 2.

Construção:



R: x = BC.

PROBLEMAS:

1) Determine $x \mid x^2 = 31$;
2) Determine $y \mid y^2 = 12$;
3) Determine $z \mid z^2 = 8$, pelos três processos apresentados em sala e aponte o mais adequado.

Capítulo 7. Expressões Pitagóricas

ATIVIDADES: Resolução de expressões matemáticas, de primeiro grau, pelo Desenho Geométrico (Processo Euclidiano).

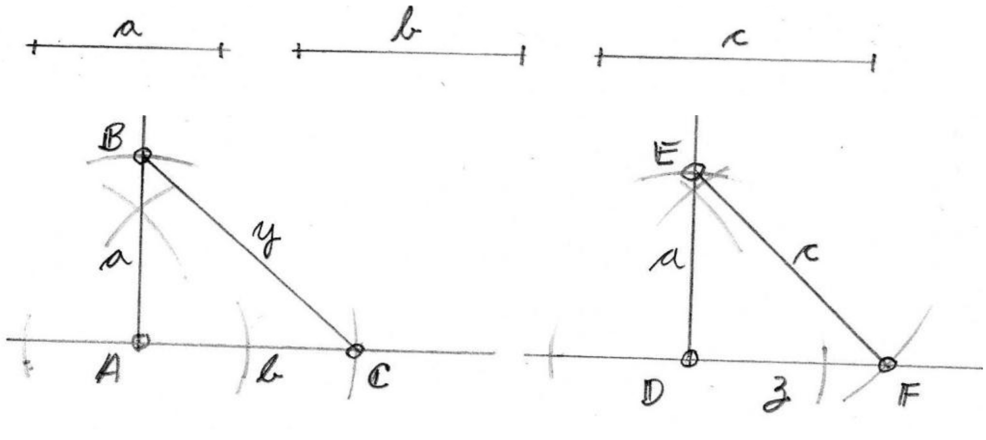
COMENTÁRIOS: Como mencionado anteriormente, passamos à aplicação dos conceitos vistos até o momento: Quarta e Terceira Proporcionais, Soma, Subtração, Multiplicação e Divisão e a Média Geométrica.

Exemplo 1: Dados os segmentos a, b e c, det. x tal que $x = (a^2 + b^2):c + (c^2 - a^2):b$;

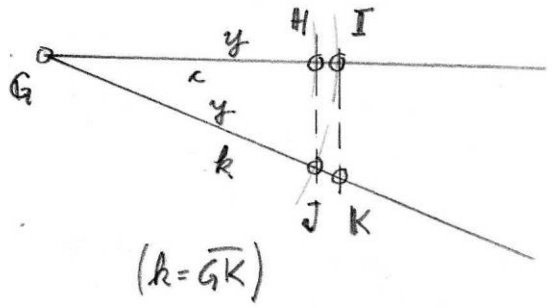
Comentário: Para resolvermos graficamente uma equação desta complexidade precisamos, primeiro, identificar, na equação, as partes que se adéquem às resoluções aprendidas. Assim, podemos fazer: $a^2 + b^2 = \mathbf{y^2}$ e $c^2 - a^2 = \mathbf{z^2}$. Em seguida resolvendo $y^2:c = k$ e $z^2:b = w$, e somando os segmentos k e w, temos x.

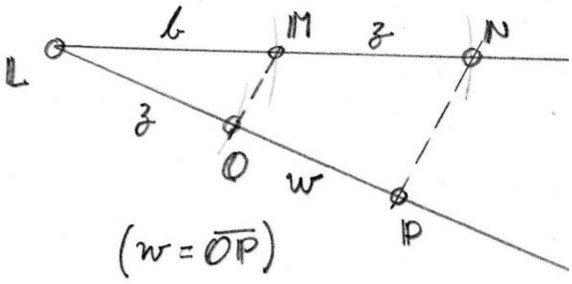
Resolução:

1ª etapa: Determinação de $y^2 = a^2 + b^2$; $z^2 = c^2 - a^2$ (isto é: $c^2 = a^2 + z^2$).

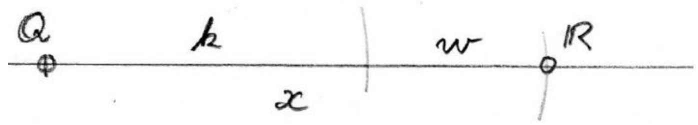


2ª etapa: Determinação de $k = y^2$/c e $w = z^2/b$, isto é: $c/y = y/k$ e $b/z = z/w$.





3ª etapa: Determinação de x = k + w.



R: x = QR.

Exemplo 2: Determine y | y = (2.√7):√3 + √10 .

Comentário: Adotando o segmento unitário u = 1,0 cm, e transformando a equação em: y = (2.a):b + c, e, a seguir, em y = k + c, determinamos y. Lembrando que determinamos a, b e c pelo processo pitagórico mais adequado e, em seguida, determinamos k pela quarta proporcional.

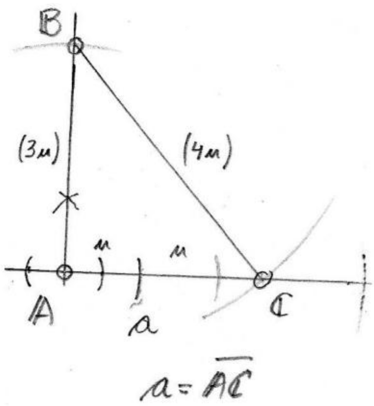
Resolução:

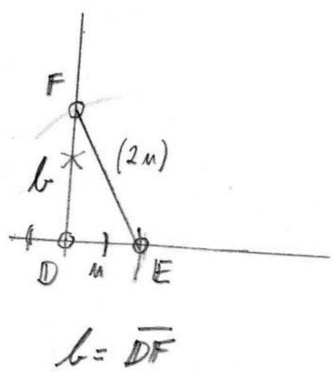
1ª etapa: Determinação de b = √7; b = √3 e c = √10, isto é:

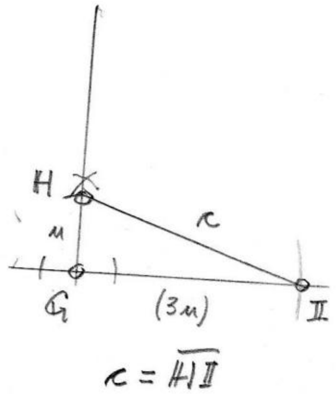
$a^2 = 4^2 - 3^2 \rightarrow 4^2 = 3^2 + a^2;$

$b^2 = 2^2 - 1^2 \rightarrow 2^2 = 1^2 + b^2;$

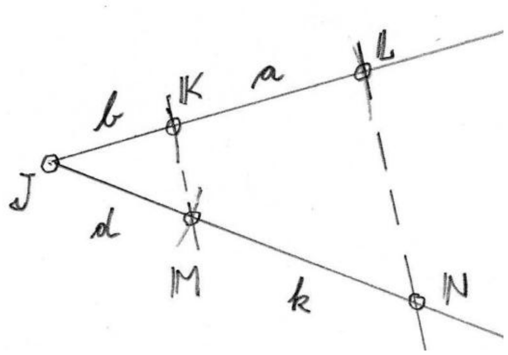
$c^2 = 3^2 + 1^2$





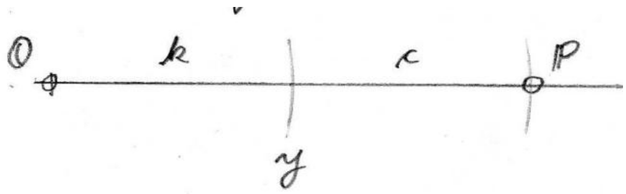


2ª etapa: Determinação de $k = d.a/b$ (sendo $d = 2u$) $\rightarrow b/d = a/k$;



$k = MN$

3ª etapa: Determinação de $y = k + c$:



R: $y = OP$.

PROBLEMAS:

1) Determine o valor de $x \mid x = (21): \sqrt{2} - (6):\sqrt{3}$;
2) Resolva: $y^2 = (16 + 25).(22)$.

Capítulo 8. Sistemas de Equações

ATIVIDADES: Aplicação do conceito de Média Geométrica obtida entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa ou entre uma tangente e as partes de uma secante.

COMENTÁRIOS: Outra alternativa interessante para motivar o aluno em mais um tópico da Matemática considerado “torturante”. Trata-se de uma aplicação direta no triângulo retângulo (processo aditivo) ou na circunferência, considerando uma tangente e a secante que passa pelo centro dela.

a) Sistemas o Tipo: $\quad$ ax + by = m

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx - dy = n \end{cases}$$

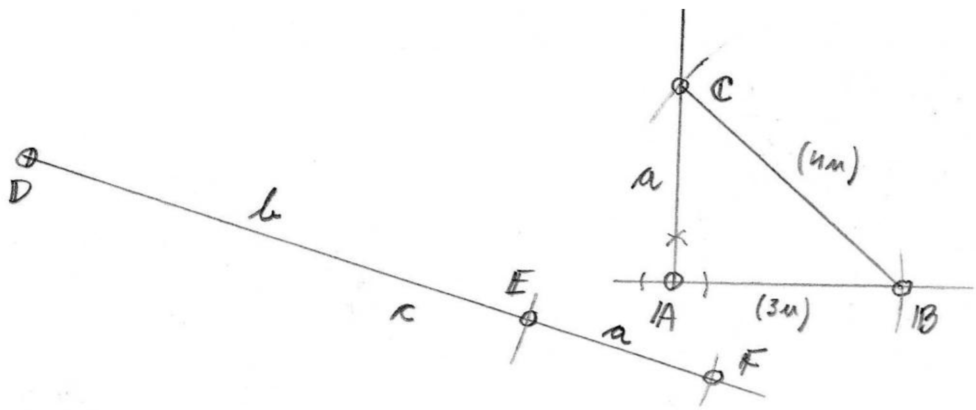
Sistemas desse tipo, visando a uma solução euclidiana devem ser reduzidos a uma equação linear pelos processos conhecidos (adição, substituição ou comparação) e, então, o resultado é obtido pelas formas estudadas acima.

Exemplo: Resolva o sistema: $x + 2.y = 7$
$x - y = \sqrt{7}$

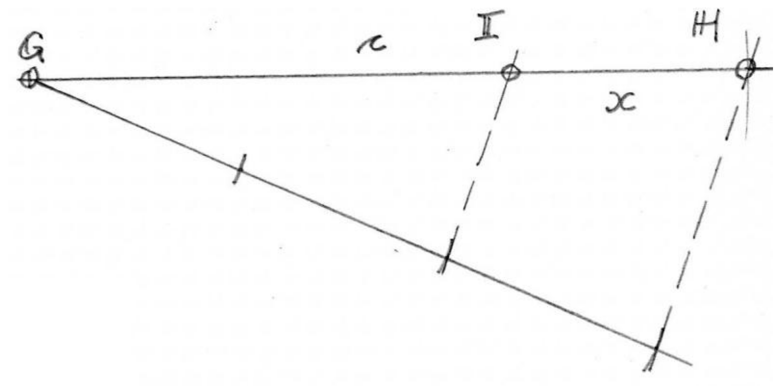
Comentário: Temos que $3.x = 7 + 2.\sqrt{7}$, ou, $x = 7:3 + (\sqrt{7}):3$.
Determinando $\sqrt{7}$ por Pitágoras, somando o resultado com 7 unidades e dividindo por 3 (divisão de segmento), temos x. O valor de y, por sua vez, é obtido na equação: $y = (7 - x):2$.

Resolução:

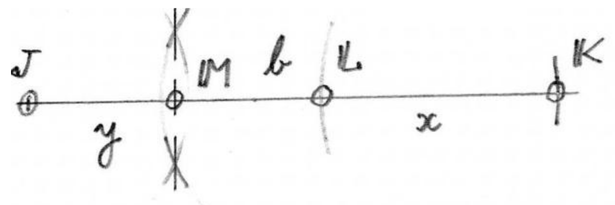
1ª etapa: Determinação de $a = \sqrt{7}$, $b = 7$ e $c = a+b$:



2ª etapa: Determinação de x = c/3:



3ª etapa: Determinação de y = (b – x) /2:



R: x = HI; y = JM.

b) Sistemas do Tipo: $x + y = m$, $x.y = n^2$

Sistemas desse tipo são resolvidos pelo Processo Aditivo da Média Geométrica, uma vez que n (altura do triângulo retângulo) é a MG entre as projeções (incógnitas x e y) dos catetos sobre a hipotenusa. Sendo que esta é justamente de valor conhecido m (a soma de x com y).

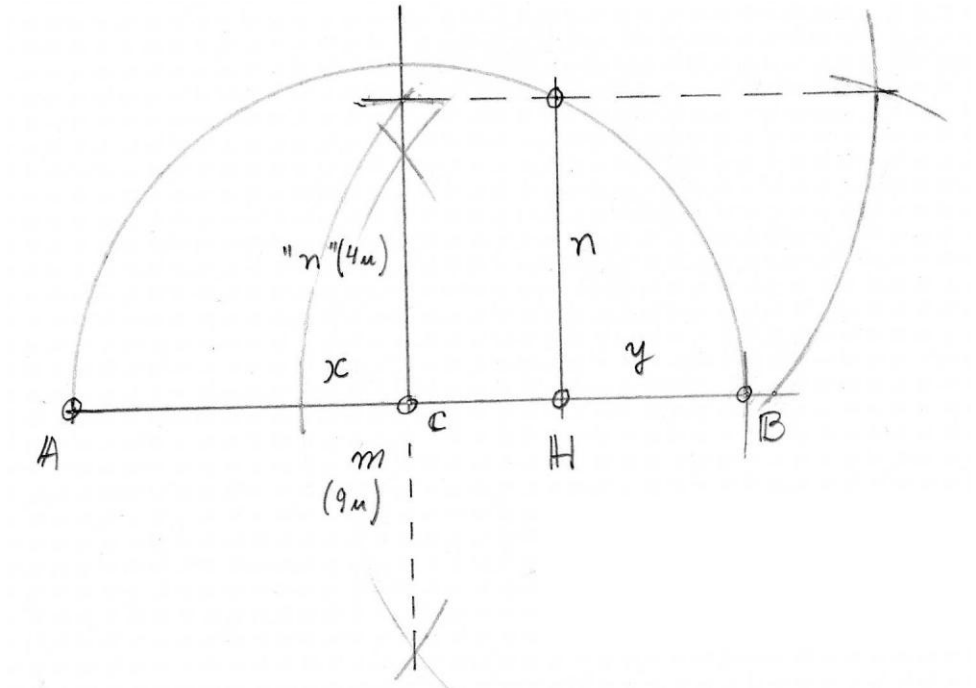
OBS.: Há uma condição de existência: n não pode ser maior do que a metade de m.

Exemplo: Resolva (graficamente) o sistema: $x + y = 9$

$x.y = 16$

(lembrando que $16 = 4^2$, temos que $m = 9$ e $n = 4$)

Resolução:



R: x = AH; y = HB.

c) Sistemas do Tipo: $\begin{cases} x - y = m \\ x.y = n^2 \end{cases}$

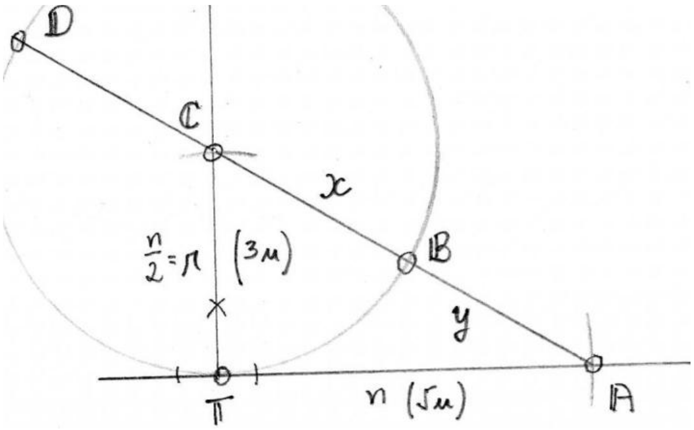
Sistemas desse tipo são resolvidos pela MG que relaciona a tangente com as partes de uma secante, vista no item d de 2.6. Naturalmente a secante a ser construída não poderá ser uma qualquer. Deverá ser uma secante que passe pelo centro da circunferência pois se a parte inteira (x) menos a parte exterior (y) deve ser um valor conhecido, não poderá ser uma corda qualquer sob pena de não ser possível construir a circunferência. Deverá ser, pois, o diâmetro.

Exemplo: Resolva o sistema: $x - y = 6$

$x.y = 25$

(observando que $25 = 5^2$, assim, $m = 6$ e $n = 5$)

Resolução:



R: x = AD; y = AB.

PROBLEMAS:

1) Resolva o sistema: a) $x + y = 7$ b) $x - y = 10$

$x.y = 9$ $x.y = 9$

Capítulo 9. Resolução de Equações do 2º Grau

ATIVIDADES: Resolução, pelo Processo Euclidiano, partindo do formato de um sistema de equações que envolve as raízes da equação de segundo grau.

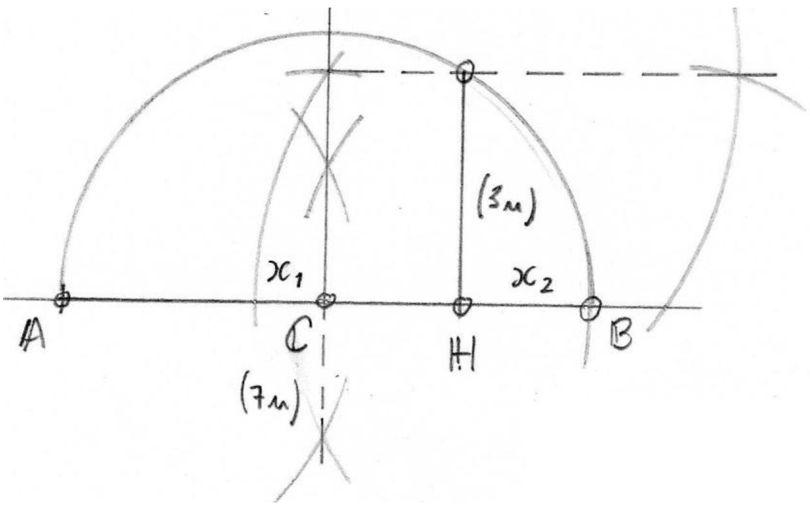
COMENTÁRIOS: Desfecho surpreendente para a maioria dos alunos. E que, devido a isso, é uma alternativa muito interessante para fixar esse assunto da Álgebra que, usualmente, só aprendem a resolver aplicando a igualmente insossa e incompreensível fórmula de Bháskara. Sua resolução é obtida com o procedimento estudado nos sistemas de equações.

As Equações do 2º grau, no processo Euclidiano são resolvidas utilizando os mesmos conceitos dos Sistemas de Equações. Para isso, é necessário, primeiro, escrever a expressão no formato $x^2 \pm mx \pm n^2 = 0$. Assim, uma equação que, em princípio se apresenta como $ax^2 + bx + c = 0$, deve ter seus elementos divididos por a e, a seguir, determinado um número n tal que $c = n^2$. Teremos, então, um sistema do tipo: $x1 \pm x2 = m$ e $x1.x2 = n^2$

Exemplo 1: Resolva, graficamente, $x^2 - 7x + 9 = 0$

Comentário: as raízes da equação dada somadas e multiplicadas entre si resultam em $x1 + x2 = 7$ e $x1.x2 = 3^2$, que se resolve como visto no item b de sistemas.

Resolução:



R: x_1= AH; x_2= HB.

Exemplo 2: Determine as raízes da equação: $2x^2 + 10x = 72$

Comentário:

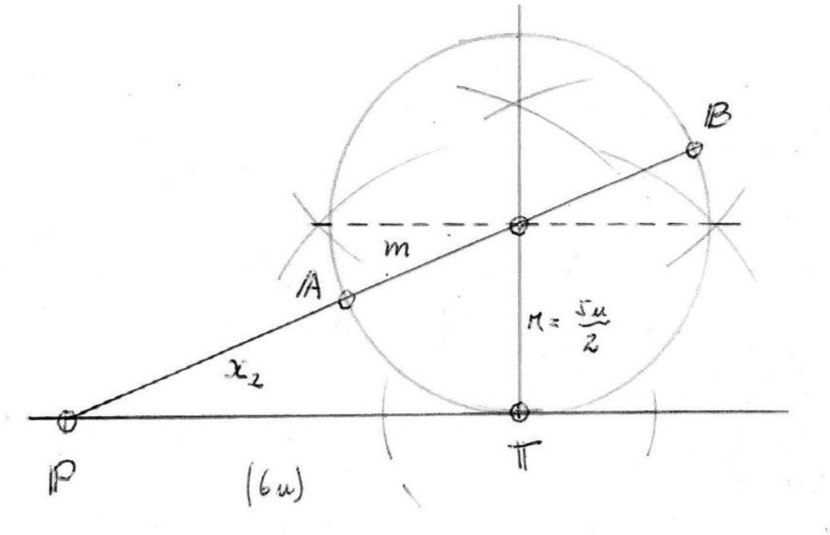
dividindo os elementos por 2 e transferindo todos para o lado esquerdo, teremos: $x^2 + 5x - 36 = 0$, cujo sistema se apresenta como

$(-x1) – x2 = 5$

$(-x1).(x2)= 6^2$

que se resolve como no item c de sistemas, fazendo $-x1 = m$.

Resolução:



R: $m = -x_1 = PB$; $x_2 = PA$.

PROBLEMAS:

1) Resolva a equação: a) $x^2 + 11x + 25 = 0$;

b) : $x^2 - 5x - 36 = 0$

RESUMO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

COM EXPLICAÇÕES E COMENTÁRIOS

TEMA	ATIVIDADE	COMENTÁRIOS
Construções Fundamentais	Construção de Perpendiculares e Paralelas; Construção de Ângulos; Transporte de Ângulos e Segmentos.	As Construções de Perpendiculares e de Paralelas, e de ângulos, além de ter habilidade no transporte de segmentos, são essenciais para resolver problemas com desenho geométrico.
Segmentos Proporcionais	Teorema Linear de Thales; Divisão de Segmento em Partes Proporcionais;	Trata-se do processo utilizado, no desenho, para efetuar uma divisão.
Quarta e Terceira Proporcionais	Triângulo de Proporcionalidade; Operações aplicando o conceito do Teorema de Thales: Formas direta e sobreposta.	É a forma com que a maioria das equações de primeiro grau são resolvidas; Baseiam-se na aplicação do Teorema de Thales após transformar a equação em uma igualdade entre duas razões.
Resolução Euclidiana de Equações de 1º Grau	Transformação Algébrica para a forma de Quarta ou Terceira proporcional e soma de segmentos. Aplicação no Triângulo de Proporcionalidade.	As equações de Primeiro Grau sempre podem ser transformadas em uma sequência de quartas ou terceiras proporcionais e soma, subtração, multiplicação ou divisão de segmentos, obtidos de um segmento unitário.
A Média Geométrica	Relações Métricas no Triângulo Retângulo; Relações que determinam Médias Geométricas; Relação entre secantes e tangentes a uma circunferência, por um ponto não pertencente a ela.	O conceito de Média Geométrica, quase sempre obscuro à maioria dos alunos, aqui tem uma luminosidade fantástica. Sua aplicação no Triângulo Retângulo ou na Circunferência tem o condão de fazer-se compreender ao mais dispersivo dos estudantes. Trata-se da aplicação direta na construção de um Triângulo Retângulo (ou na circunferência) a partir de uma equação onde aparece a raiz quadrada de um produto.

Equações com Raiz Quadrada	Aplicação do conceito de Média Geométrica obtida nas relações métricas no triângulo retângulo	Complementa o processo apreendido no item anterior. Reforça o conceito de Média Geométrica, tanto entre projeções dos catetos como entre um cateto e sua projeção (Processos Aditivo e Subtrativo)
Expressões Pitagóricas	Resolução de expressões matemáticas, de primeiro grau, pelo Processo Euclidiano .	Aplicação dos conceitos vistos até o momento, Quarta e Terceira Proporcionais, Soma, Subtração, Multiplicação e Divisão e a Média Geométrica.
Sistemas de Equações	Aplicação do conceito de Média Geométrica obtida entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa ou entre uma tangente e as partes de uma secante.	Outra alternativa interessante para motivar o aluno em mais um tópico da Matemática considerado "torturante". Trata-se de uma aplicação direta no triângulo retângulo (processo aditivo) ou na circunferência, considerando uma tangente e a secante que passa pelo centro dela.
Equações do Segundo Grau	Resolução, pelo Processo Euclidiano, partindo do formato de um sistema de equações que envolve as raízes da equação de segundo grau.	Desfecho surpreendente para a maioria dos alunos. E que, devido a isso, é uma alternativa muito interessante para fixar esse assunto da Álgebra que, usualmente, só aprendem a resolver aplicando a igualmente insossa e incompreensível fórmula de Bháskara. Sua resolução é obtida com o procedimento estudado nos sistemas de equações.

BIBLIOGRAFIA

CARVALHO, B. A. *Desenho Geométrico,* Ao Livro Técnico S. A. Rio de Janeiro. 1969;

JORGE, S. *Desenho Geométrico, Idéias & Imagens,* Editora Saraiva, S. Paulo. 1998;

MARMO, C. *Curso de Desenho,* Gráfica Editora Hamburg Ltda, São Paulo, 1964;

TOMEI, C. *Euclides – A Conquista do Espaço,* Odysseus Editora Ltda, São Paulo, 2006;

CALFA H. G.**,** ALMEIDA , L. A., BARBOSA, R. C. *Desenho Geométrico Plano.* BIBLIEX - Biblioteca do Exército – RJ – 1995