

Desenvolvendo o Pensamento Probabilístico: experiências vividas por um grupo de Professores de Matemática de Conselheiro Lafaiete (MG)



Mestrado Profissional
em Educação Matemática

sores de Matemática de Conselho

Fernanda Monteiro de Castro Rezende

Orientadora: Ana Cristina Ferreira

**Desenvolvendo o Pensamento
Probabilístico: experiências vividas
por um grupo de Professores de
Matemática de Conselheiro Lafaiete
(MG)**

Desenvolvendo o Pensamento Probabilístico: experiências vividas por um grupo de Professores de Matemática de Conselheiro



EDITORA UFOP

Ouro Preto 08 | 2013

©2013
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitor | Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
Vice-Reitora | Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
Diretora | Profa. Dra. Raquel do Pilar Machado
Vice-Diretor | Prof. Dr. Fernando Luiz Pereira de Oliveira

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Dr. Valdeci Lopes de Araújo
Pró-Reitor Adjunto | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva



Coordenação | Profa. Dra. Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira, Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes, Prof. Dr. Dale William Bean, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana, Prof. Dr. Plínio Cavalcante Moreira, Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki.

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

Reprodução proibida Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados.

Desenvolvendo o Pensamento Probabilístico: experiências vividas por um grupo de Professores de Matemática de Conselheiro



Epígrafe

*Terei que correr o sagrado risco do acaso. E
substituirei o destino pela Probabilidade.
Clarice Lispector (1920-1977)*

Expediente Técnico

Organização | Fernanda Monteiro de Castro Rezende

Pesquisa e Redação | Fernanda Monteiro de Castro Rezende
Ana Cristina Ferreira

Revisão | Fernanda Monteiro de Castro Rezende

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Fotos | Fernanda Monteiro de Castro Rezende

Ilustração | Editora UFOP

Apresentação	10
1. Introdução.....	12
2. Algumas considerações a respeito do ensino e da aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica.....	14
3. O que se espera do professor que ensina Probabilidade?.....	17
4. Apresentando e discutindo as tarefas.....	20
5. Comentários gerais.....	54
Referências.....	55

Desenvolvendo o Pensamento Probabilístico: experiências vividas por um grupo de Professores de Matemática de Conselheiro

Caro(a) Leitor(a)

Apresentamos a você um exemplar da 4ª Coleção Cadernos de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática. Nela, você encontrará livretos com proposta de ensino e de formação de professores.

Cada Caderno representa o esforço de um(a) professor(a) de Matemática em buscar alternativas para a melhoria do ensino dessa disciplina. Todos os autores cursaram o Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto e suas pesquisas tiveram como foco a sala de aula, a formação de professores e/ou processos que envolvem professores, alunos e a Matemática.

Esperamos, em breve, dispor da versão definitiva disponível para aquisição (impresa) e na página do Programa (www.ppgedmat.ufop.br).

Espero que gostem!

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Caro(a) professor(a),

Os experimentos e tarefas aqui apresentadas foram desenvolvidas em um grupo de estudos de Probabilidade, composto por professores de Matemática que atuam em escolas públicas de Conselheiro Lafaiete (MG).

Transformei a experiência vivida por esse grupo em uma pesquisa de Mestrado¹. Seu propósito era contribuir para o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos professores de Matemática participantes, e mostrar de que forma a participação no mesmo pode contribuir para a mobilização de saberes dos docentes do grupo.

Minha intenção é compartilhar essa experiência e convidá-lo(a) a criar as suas. Assim, não pretendo oferecer um conjunto de atividades de Probabilidade a serem seguidas 'à risca', mas um apoio a professores, futuros professores e formadores de professores que desejarem trabalhar tal conteúdo de maneira diferenciada, buscando uma compreensão profunda dos conceitos envolvidos, mais que a memorização de fórmulas. Elas servem como uma ideia inicial para que você possa adaptá-las às suas necessidades.

Selecionei algumas das atividades desenvolvidas pelo grupo e as apresento neste livreto, juntamente com os objetivos iniciais da atividade ao ser trabalhada e alguns comentários, fruto da discussão gerada pelo grupo.

É meu desejo que este material chegue até as salas de aula da Educação Básica, contribuindo para um ensino de Probabilidade que leve o educando a pensar e ir além da mera aplicação de fórmulas. Sem exagerar

¹ REZENDE, Fernanda Monteiro de Castro. Desenvolvimento Profissional e Pensamento Probabilístico: estudo do Processo Vivido por um Grupo de Professores de Matemática de Conselheiro Lafaiete (MG). Dissertação. Mestrado em Educação Matemática-UFOP. Ouro Preto, 2013.

na pretensão, espero ainda que este material possa contribuir para a prática docente de professores que buscam crescer profissionalmente, já que ele é fruto do trabalho de profissionais que, em meio a jornadas duplas e triplas de trabalho, encontraram tempo para se dedicar a aprender um pouco mais sobre Probabilidade e seu ensino.

Fernanda

1- Introdução

Atuando como professora há quinze anos e nove no ensino de Matemática para a Educação Básica sentia-me, de certa forma, um pouco “abandonada”.

Com o tempo percebi que, entra ano, sai ano, conteúdos tornam-se obrigatórios ou são acrescentados aos currículos sem que se pense na pessoa do professor, se ele tem conhecimento matemático e/ou didático para trabalhar tal assunto na Educação Básica.

Contudo, nas orientações ao professor, contidas nos materiais didáticos, são sempre pedidas diversidade de abordagens e metodologias, que se leve em consideração o conhecimento prévio e a vivência do aluno sem se preocupar se, em sua formação, o professor já teve contato com variadas formas de se trabalhar os diferentes conteúdos de Matemática.

A escolha pelo tema “Probabilidade” também partiu de minha vivência: na Educação Básica estudei tal conteúdo apenas no Ensino Médio, ainda assim priorizando a mera aplicação de fórmulas de combinatória, e na graduação não foi muito diferente. Como os documentos oficiais recomendam fortemente o trabalho com Probabilidade na Educação Básica, resolvi realizar um trabalho com um grupo de professores que se prontificassem a dedicar algumas horas semanais à busca pelo desenvolvimento de seu pensamento probabilístico.

A proposta que aqui apresento não foi construída a priori, antes de entrarmos em contato com as professoras. Baseados em nossas leituras, nas experiências pessoais e concepções sobre ensino de Probabilidade, preparamos as atividades para os encontros iniciais. As demais atividades

foram selecionadas ou elaboradas num trabalho concomitante à pesquisa, partindo das dificuldades apresentadas pelas professoras ou percepção, por nossa parte, da necessidade de se reforçar o estudo de determinado tópico.

Contudo, não perdemos o foco: sempre preocupadas com a formação docente para se ensinar Probabilidade, concentramos nossas forças no sentido de aprimorar os conhecimentos dos participantes, desenvolvendo atividades que estimulassem o desenvolvimento do pensamento probabilístico. As atividades foram planejadas de maneira a promover a criação de um espaço de aprendizagem coletiva, propício tanto ao desenvolvimento profissional de professores de Matemática quanto à mobilização de seus saberes.

Segundo Lopes (2003), o desenvolvimento do Pensamento Probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. Para ela, a partir dessas considerações, é possível criar situações didáticas que trabalhem com a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, favorecendo uma integração entre a Probabilidade e a Estatística, culminando no desenvolvimento do raciocínio estocástico.

Constam de nossa proposta atividades como jogos, experimentos, textos, uso de termos probabilísticos etc. que buscam favorecer o desenvolvimento do pensamento probabilístico, durante o ensino de Probabilidade.

Ressaltamos ainda a importância dos materiais manipulativos utilizados durante a realização de jogos e experimentos, contribuindo para a formação e solidificação de conceitos probabilísticos. Em nossa pesquisa, as participantes, ao realizarem este tipo de atividade, eram levadas a anotar e comparar resultados.

Apesar de terem sido compostas para um trabalho de formação continuada de professores, todas as atividades de nossa proposta podem ser desenvolvidas com alunos da Educação Básica, muitas vezes, sem necessidade de adaptação.

O livreto está organizado da seguinte forma: primeiro, apresentamos algumas das ideias que fundamentaram todo o trabalho, ou seja, leituras e reflexões que nortearam a construção de cada tarefa. Em seguida, apresentamos algumas das atividades realizadas, acompanhadas de seus objetivos iniciais. Os comentários apresentam sugestões de realização das atividades propostas e no tópico “no grupo de estudos” encontramos fragmentos de alguns episódios ocorridos durante a realização destas no grupo.

2. Algumas considerações a respeito do ensino e da aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica

O ensino de Probabilidade e Estatística tem ganhado cada vez mais destaque nas diversas propostas curriculares. Segundo Azcárate (2006), este reconhecimento institucional é reflexo das características da nossa sociedade. A vida em sociedade é caracterizada como um ambiente sujeito a elevados níveis de incerteza e onde a capacidade de analisar, interpretar e transmitir informações adequadamente são habilidades necessárias à vida cotidiana; e para uma ação cidadã efetiva, envolve ainda a tomada de decisão em muitas situações afetadas pela incerteza. O fácil acesso à informação reforça esta ideia.

O acaso é inerente a nossas vidas e aparece em múltiplas situações cotidianas ou da vida profissional. Porém, as intuições em Probabilidade com frequência nos enganam e o ensino formal é insuficiente para superar os vieses de raciocínio que podem levar a decisões incorretas (BATANERO, 2006). A autora considera formal o ensino previamente estruturado, cercado de formalismo e baseado, quase sempre, na mera aplicação de fórmulas sem dispensar atenção suficiente com os conceitos, termos probabilísticos e, em especial, com o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Embora a Probabilidade tenha estado presente nos currículos da Educação Básica nos últimos vinte anos, encontramos uma tendência recente em renovar seu ensino, tornando-o mais experimental. Destacam-se duas razões: o fato de a Probabilidade ser parte dos conhecimentos básicos de Matemática e de outras disciplinas e, seu papel na preparação dos estudantes para lidar com as situações cotidianas de modo mais crítico, já

que o acaso e os fenômenos aleatórios permeiam nossas vidas e nosso meio.

Analisando os PCN bem como a proposta curricular de Minas Gerais verificamos que, as atividades focando a mera aplicação de fórmulas e os trabalhosos cálculos probabilísticos distantes da realidade, devem dar lugar a uma metodologia de caráter mais experimental, priorizando atividades experimentais para se criar modelos de Probabilidade. Apresenta-se aos alunos, por exemplo, uma experiência prática probabilística e os alunos são convidados a arriscar resultados. Registrando os resultados obtidos durante a realização da atividade, vão descobrindo, aos poucos, qual evento é mais provável e o "quanto" mais provável é.

O desenvolvimento das noções de Probabilidade, das ideias de acaso, azar e aleatoriedade é fundamental para que o indivíduo possa realizar uma leitura crítica das ações sociais que o cercam, bem como efetuar tomadas de decisões baseadas em uma visão da realidade formada de maneira autônoma, após analisar o que é possível, impossível e o que é provável. Segundo Lopes (2003), a Combinatória, a Probabilidade e a Estatística inter-relacionam-se, proporcionando uma filosofia do azar de grande alcance para a compreensão do mundo atual e capacitam pessoas a enfrentarem tomadas de decisões, quando somente dispõem de dados afetados pela incerteza, situações comuns em nosso cotidiano.

Corroboramos com Lopes (2010) quando alega que, apesar de a inclusão da Estatística e da Probabilidade no currículo de matemática de vários países ser explícita e efetiva, o mesmo não ocorre dentro das salas de aula. A autora afirma que estes temas, em geral, são colocados no final dos programas de ensino e, assim, nem sempre são estudados pelos alunos, por

falta de tempo, por falta de convicção do seu real interesse ou por falta de domínio teórico metodológico do professor sobre os conceitos probabilísticos (LOPES, 2010, p. 58).

Segundo a autora, a implementação curricular da Probabilidade no Brasil ainda depende de um investimento significativo dos educadores matemáticos no que se refere à formação inicial e contínua dos professores, à elaboração de livros didáticos e outras publicações que possam subsidiar o trabalho do professor da Educação Básica. A autora também considera importante incentivar e orientar projetos de pesquisa com foco no ensino destas temáticas na Educação Básica. No próximo tópico são apresentadas reflexões de alguns teóricos sobre o pensamento probabilístico, sempre relacionado ao desenvolvimento deste no aluno ou no professor.

3. O que se espera do professor que ensina Probabilidade?

Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha. Não posso ensinar o que não sei. (FREIRE, 1996, p. 95)

Segundo Contreras et al (2010), apesar das exigências de documentos oficiais e das novas diretrizes propostas ou impostas pelos governos ou órgãos da Educação, alguns professores podem não estar familiarizados com a metodologia sugerida por estas propostas. Estes autores asseguram, ainda, que sem a formação necessária para o ensino de Probabilidade, os professores podem não se sentir seguros para lidar com algumas das dificuldades e pré-conceitos sobre Probabilidade de seus alunos ou mesmo não estarem capacitados para interpretar erros e raciocínios destes durante a

resolução de alguma situação problema, experimento ou jogo. Se a sua formação inicial foi focada em habilidades matemáticas, priorizando a aplicação de fórmulas, pode se sentir inseguro com abordagens mais informais, como as que utilizam realização de experimentos, jogos e textos. É importante apoiá-los e proporcionar atividades que sirvam para conectar o conceitual e o didático.

Para Lopes (2003), as investigações a respeito do pensamento probabilístico permitem que se façam recomendações sobre a prática educativa desse tema. Destacam-se discussões sobre a necessidade de se realizar experimentos de simulação - nos quais apareçam sequências aleatórias -, de se valorizar a utilização de vocabulário adequado para descrever e quantificar situações relacionadas ao azar e de se confeccionar tabelas de frequências e gráficos para representação do comportamento de fenômenos aleatórios.

Diversas são as dificuldades enfrentadas pelos professores durante o ensino de Probabilidade. Os estudos de Batanero, Godino e Roa (2004) destacam-se por, além de analisarem as razões pelas quais a Probabilidade é um tema difícil de ensinar, discutirem os conteúdos necessários na preparação didática dos professores para ensinar Probabilidade. Segundo os autores, o 'conhecimento didático' necessário para os professores durante o ensino de estocástica² inclui os seguintes aspectos:

1. Reflexão epistemológica dos diferentes significados de Probabilidade.

² Estocástica é um termo que tem sido utilizado com frequência por diversos pesquisadores do ensino de estatística, Probabilidade e combinatória. Esse termo refere-se à interface entre os conceitos combinatório, probabilístico e estatístico, os quais possibilitam o desenvolvimento de formas particulares de pensamento, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretação de amostras e elaboração de inferências (LOPES; MORAN, 1999, apud LOPES, 2012, p. 161).

2. Experiência na adaptação do conhecimento para diferentes níveis de ensino e para os vários níveis de compreensão (desenvolvimento) dos alunos.
3. Capacidade crítica para analisar livros de texto e documentos curriculares.
4. Capacidade de prever as dificuldades de aprendizagem dos alunos, os erros, os obstáculos e estratégias de resolução de problemas.
5. Habilidade para desenvolver e analisar diferentes tipos e instrumentos de avaliação e para interpretar as respostas dos alunos.
6. Experiência com bons exemplos de situações de ensino, ferramentas e materiais de ensino (BATANERO, GODINO e ROA, 2004, p. 3, tradução nossa).

Os autores destacam a importância de se criar meios adequados e eficazes para ensinar este "conhecimento didático" para os professores. Como consideram que os alunos constroem seus conhecimentos de uma forma ativa, através da resolução de problemas e interação com seus colegas de classe, afirmam que essa mesma abordagem deve ser utilizada na formação dos professores. Conceituam como importante dar aos professores mais responsabilidade na sua própria formação e ajudá-los a desenvolver o pensamento crítico e criativo (SHULMAN, 1986, apud BATANERO, GODINO e ROA, 2004, tradução nossa). Completam que devem ser criadas condições adequadas para os professores refletirem sobre suas crenças anteriores, sobre o ensino e discutirem essas ideias com outros colegas.

A partir de nossos estudos sobre Probabilidade, elaboramos atividades condizentes com um ensino que priorizasse o desenvolvimento do pensamento probabilístico. Apostamos nos trabalhos com experimentações, resoluções de problemas, textos e discussões sobre Probabilidade,

privilegiando situações de aprendizagem que possibilitassem a percepção, discussão de diferentes ideias sobre o tema e a articulação dessas ideias com as experiências pessoais dos professores participantes do grupo.

Durante a realização do trabalho com o grupo de estudos, chamou-nos a atenção a importância de se registrar todos os resultados obtidos nas atividades, em especial, experimentações e jogos. Tais resultados devem ser apresentados aos alunos para que verifiquem os tipos de sequências obtidas, valores que mais se repetiram, que menos se repetiram ou mesmo que não apareceram. Nossa experiência permite-nos afirmar que tal atitude enriqueceu muito as discussões e propiciou o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos participantes.

Apresentamos a seguir, algumas das atividades realizadas no grupo bem como os objetivos e alguns comentários. O texto da dissertação conta com um repertório maior de atividades, além de algumas discussões do grupo de estudos acerca destas.

4. Apresentando e discutindo as tarefas:

Lançamento de uma moeda

Objetivos

Nosso objetivo era perceber que noções as professoras tinham de aleatoriedade, bem como verificar se suas concepções sobre “sorte” e “azar” se tornariam perceptíveis, ou se acreditavam fielmente nos resultados obtidos pelos cálculos matemáticos.

Realização:

Com os participantes organizados em duplas. Cada dupla recebe duas moedas. Cada participante lançará sua moeda 50 vezes e registrará em seu caderno a face voltada para cima. Pergunta-se, durante o lançamento:

a) Quando observamos a face da moeda voltada para cima durante o experimento, podemos saber qual será a próxima face? Você seria capaz de identificar características de um experimento aleatório?

Comentários

Em um trabalho com alunos da Educação Básica esta atividade pode ser explorada como um ponto de partida para o trabalho com a aleatoriedade. Em nossa pesquisa de mestrado percebemos o impacto que a apresentação de todos os resultados no quadro surtiu sobre os participantes do grupo. A observação das sequências obtidas e a respectiva discussão causada revelaram a necessidade de se utilizar tal artifício, logo, aconselhamos que o mesmo seja feito sempre que a atividade for realizada.

O ambiente criado poderá contar com discussões que permitam socializar as ideias iniciais dos alunos sobre aleatoriedade, estudo que deve ser

introduzido na Educação Básica desde as séries iniciais. As professoras participantes do grupo, baseadas em sua experiência docente, sugeriram que a atividade fosse trabalhada com alunos do 6º ano. Vale ressaltar que a atividade pode ser trabalhada tanto com alunos dos anos iniciais quanto das séries finais da Educação Básica. O importante é investigar que noção de aleatoriedade os alunos tem, antes de propor a tarefa.

No grupo de estudos...

A seguir, apresentamos um trecho da discussão que se estabeleceu, quando a pergunta do experimento foi repetida: “Quando observamos a face da moeda voltada para cima durante o experimento podemos saber qual será a próxima face?”

Paula: Sim, nesse caso, como agora deu cara, a próxima será coroa.

Pesquisadora: Por quê?

Paula: Nesse caso, porque tem 50% de chance de sair cara ou coroa.

Pesquisadora: Mas é isso que você está percebendo durante seus lançamentos, a sequência cara, coroa, certinha?

Paula: Não, aqui eu não tô vendo isto (rindo), mas o certo, a Probabilidade, é 50% de ser cara e 50% de ser coroa.

Alice: Não, não, não...

Pesquisadora: O que foi, Alice?

Alice: Uma coisa não tem nada a ver com a outra. A gente sabe que a tendência é dar meio a meio, mas eu acho que não vai dar não. Tem alguma coisa errada com essa moeda... ela tá viciada...(rindo)

Paula: Mas só tem cara e coroa, 50% de chance de ser cara e 50% de chance de ser coroa.

sala de aula onde o grupo se reunia neste encontro. Assim, as professoras tiveram a oportunidade de compará-los. Alice complementa:

Alice: Como são duas possibilidades, a gente pensa que é meio a meio, que vai... alternar, mas não é isso que acontece, quando a gente começa a jogar e vê que tá repetindo muito um resultado a gente pensa que tá errado, que a moeda tá viciada. Na verdade, a gente pode jogar a moeda 50 vezes, ela não ser viciada e ela dar 50 caras...

Pesquisadora interrompe...

Pesquisadora: Será que pode? (rindo)

Alice: Pode! Poder pode!

Pesquisadora: Pode Paula?

Paula: Eu acho que não... É mais difícil.

Pesquisadora: Não?

(Alice discorda e fala imediatamente)

Alice: Pode! É por isso que eu acho que a gente tem que parar as aulas para dar atividades diferenciadas, por quê? Com o experimento que a gente fez aqui, bonitinho, a gente pára pra pensar o quê? Que a ocorrência de uma face não influencia a outra, por mais que repita, a outra pode ser a mesma ainda. Eu posso lançar a moeda 50 vezes, ela não ser viciada e ela dar 50 caras ou 50 coroas direto. É mais difícil, como você falou, mas pode? Pode! Pode!

Paula: Eu falei que era meio a meio e deu mais cara que coroa...

Alice: É porque você tava pensando que tinha que dar o resultado. Tinha a possibilidade de sair cem caras em cem lançamentos. É por isso que eu to falando que é bom, entendeu? Fazer o experimento é bom porque desmitifica o mais provável de acontecer.

Paula: Eu acho que é meio a meio, por serem duas faces, continuo essa.

Alice: Eu acredito que pode ocorrer dispersão de dados, por ser aleatório, por mais que a Matemática fale o que for. Pode sair cem caras em cem lançamentos mesmo sem... como é que fala? A moeda ser viciada. É difícil, mas pode.

Alice procura convencer Paula de que o evento só é impossível se não existir nenhuma chance de ele acontecer³.

Em seu caderno, na avaliação deste encontro, Alice afirma: *“Experiência que pode ser trabalhada em sala de aula para agregar conhecimento e fazer com que o aluno faça parte da construção disso. No caso dessa atividade ele ia aprender de verdade, não iria ser mais uma verdade absoluta do professor, uma ideia pronta”*.

Esse primeiro encontro evidenciou claramente a necessidade de ir além das fórmulas, buscando explorar as concepções que cada professora mantinha acerca da Probabilidade, bem como criar um ambiente no qual a argumentação e a comunicação matemática fossem valorizadas.

Apresentamos a seguir algumas atividades desenvolvidas em outros encontros.

O jogo da diferença

Objetivos:

- Estudar as noções de aleatoriedade, acaso, equiprobabilidade, azar e sorte.
- Após a realização do jogo, provocar a observação e reflexão sobre experimentos probabilísticos.
- Trabalhar a noção de espaço amostral.

Realização:

³ A princípio, optamos por não interferir, já que a Alice percebeu, a partir do experimento, o que tínhamos como objetivo principal ao propor a questão: a ideia de aleatoriedade. Contudo, o não convencimento de Paula é perceptível, logo, seria necessário trabalhar outras vezes com a ideia de aleatoriedade, em encontros posteriores.

Em duplas, e denominando um dos jogadores como A e outro como B (os participantes escolhem), disputar 20 partidas. Cada jogada consistirá no lançamento de dois dados (um pelo jogador A e outro pelo B) observando-se as faces voltadas para cima.

Critério: O jogador A marca ponto se a diferença (subtraindo-se sempre o menor número do maior obtido) entre os números que saírem nos dados for 0, 1 ou 2. B marcará pontos se a diferença for 3, 4 ou 5. O jogador vencedor será o que obtiver maior número de pontos nos 20 lançamentos.

Jogador A: diferenças 0, 1 ou 2

Jogador B: diferenças 3, 4 ou 5

Sugerimos que os resultados (diferenças) obtidos nos 20 primeiros lançamentos sejam lançados em uma tabela como a que segue. Cada dupla terá um vencedor (realizar o mesmo procedimento mais nove vezes, num total de 200 jogadas para cada dupla).

Lançamento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	18	19	20	Total
Jogador A																	
Jogador B																	

(A princípio, sugerimos que seja mantida a ordem: A lança, B lança.)

Espera-se que os participantes percebam, a partir do experimento, a possível vitória de A.

Sugestões de questionamentos:

- a) Por que você escolheu ser o jogador A ou B? Por que você acha que ganhou o jogo? Você acredita que o jogador venceu o jogo por ter mais sorte? (Justificar)

- b) Se você pudesse trocar (jogador A passar a ser B e vice-versa) de jogador você o faria? Acha que isso iria interferir (positiva ou negativamente) em seus resultados? Por quê?
- c) Você acha que a ordem A lança, em seguida, B lança interferiu nos resultados? Se A efetuar seus 20 lançamentos primeiro e, em seguida, B efetuar todos seus 20 lançamentos o resultado poderá ser diferente? Por quê? (Seriam os lançamentos seguidos que iriam interferir nos resultados?)
- d) Você considera o jogo justo? Por quê? Você tem alguma sugestão de adaptação para esta tarefa?

Comentários:

Este jogo deve ser realizado em duplas, e cada dupla recebe dois dados.

Sugerimos que, pelo menos os vinte primeiros resultados obtidos por cada dupla, sejam anotados em uma tabela, para então serem analisados e discutidos. O professor poderá escolher os resultados de uma ou mais duplas e anotá-los no quadro para que sejam analisados pela classe. O professor poderá ainda utilizar todos os resultados da turma, durante o trabalho com a aleatoriedade. Neste caso, ressaltamos a necessidade de se criar um material com todas as tabelas de resultados obtidos pelas duplas da classe, e não apenas com totais, permitindo analisar sequência obtida, resultados de maior incidência, etc.

Este jogo abre um leque de possibilidades de aproveitamento de resultados possibilitando, inclusive, o trabalho com a estatística associada à Probabilidade. A representação gráfica dos resultados permitiria ao professor, além da oportunidade de comparar a frequência dos resultados obtidos, reforçar a compreensão da natureza aleatória destes.

Durante a realização da atividade no grupo uma professora sugeriu que a atividade fosse realizada com alunos do 9º ano. Outra professora, contudo, acredita que apenas alunos do Ensino Médio possam realizá-la com facilidade. Ressaltamos que o nível de amadurecimento dos alunos da classe deve ser levado em consideração durante a escolha da atividade. O trabalho com jogos, de um modo geral, funciona como agente motivador para o aprendizado de Matemática, e a não observância do estágio em que a turma se encontra em termos de Probabilidade pode trazer resultados contrários ao desejado. Aconselhamos que, ao realizar esta atividade, os alunos já tenham trabalhado com experimentos aleatórios que envolvam dados e moedas. Como o conteúdo de Estatística e Probabilidade possui uma carga horária razoável destinada ao seu trabalho no 9º ano (de acordo com a proposta de Minas Gerais), apostamos no trabalho do jogo nesta série, explorando também conceitos e construções estatísticas.

Ao longo da organização dos dados, de acordo com o nível da turma, é possível que os alunos sugiram outras formas de representação além da tabela, como o diagrama de árvore.

Uma outra tarefa possível de ser sugerida à turma seria pedir que os alunos encontrassem, em duplas ou não, uma maneira de tornar o jogo justo.

Ao se calcular as probabilidades, no final da atividade, aconselhamos que sejam enumerados (no quadro) todos os resultados possíveis (eventos simples ou elementares) para este experimento.

No grupo de estudos...

Durante a realização deste jogo no grupo, as professoras afirmaram que ele também poderia ser usado com o objetivo de se trabalhar números inteiros juntamente com a Probabilidade.

As professoras observaram ainda que, se fossem apenas observar a face voltada para cima, não daria para saber quem iria ganhar. Ficaria bem dividido; um jogo justo. Analisaram cuidadosamente os resultados, discutiram e observaram quantas vezes cada número saiu e que número saiu mais vezes sem que isso fosse proposto pela pesquisadora.

No grupo, durante as tentativas das professoras de tornarem o jogo justo, ao listar todos os eventos possíveis, iniciamos o trabalho com espaço amostral de um experimento. Nossa experiência foi positiva e consideramos o momento apropriado para tal trabalho, pois as professoras estavam muito envolvidas com a tarefa de encontrar uma maneira de tornar o jogo justo e, após listarem o espaço amostral, perceberam não apenas uma, mas diversas maneiras.



Fig. 1: Exemplo de material utilizado durante a atividade

Mais experimentos com lançamentos de moedas

Os experimentos que envolviam lançamentos de moedas foram utilizados em diversos momentos da pesquisa. Como interessava-nos que a prática desenvolvida no grupo se estendesse às salas de aula dos professores participantes e, considerando que as moedas são materiais de fácil acesso, realizamos diversas variações de jogos e experimentos com este material.

1ª atividade - Experimento: Lançamento de uma moeda

Objetivos:

- Verificar a noção de sucesso aleatório dos indivíduos, bem como suas intuições sobre sorte e azar.
- Identificar que experimentos aleatórios são experimentos que, ao serem repetidos sob as mesmas condições, não produzem um mesmo resultado.
- Trabalhar a capacidade de identificar um experimento aleatório bem como de caracterizá-lo.

Realização:

Organizar os participantes em duplas. Cada dupla recebe duas moedas. Cada participante lançará sua moeda 50 vezes e registrará em seu caderno a face voltada para cima. Após já terem realizado alguns lançamentos, passar nas duplas perguntando:

- a. Lançamos uma moeda e observamos a face voltada para cima. Saiu cara. Ao lançá-la novamente, podemos saber qual será a próxima face?

- b. Quantas caras foram obtidas? É possível saber qual será a face obtida na vigésima primeira rodada?

Após a realização de todos os lançamentos por todas as duplas, podem ser realizados também os seguintes questionamentos:

- Quantas vezes a face superior foi cara e quantas vezes foi coroa?
- Por que vocês acham que o resultado foi esse?
- Poderíamos ter 100 caras em cada dupla?
- Se pensássemos no lançamento de uma moeda 1000 vezes, o que seria mais provável de acontecer, mais caras ou mais coroas? Por quê?

Comentários:

Espera-se que o aluno perceba a aleatoriedade durante o experimento, caso contrário, sugerimos lançar a ideia e iniciar uma discussão.

Os resultados obtidos pelas duplas devem ser anotados no quadro. Reafirmamos que, a partir de nossa experiência, consideramos de extrema importância que todos sejam expostos para, em seguida, serem discutidas não apenas as quantidades totais de caras e coroas, mas as sequências completas. Tal esforço se justifica pela necessidade de o aluno perceber que, apesar de não existir a alternância de resultados de cara e coroa, e ainda que ocorram longas sequências de um único resultado, as somas tendem a se aproximar de um valor numérico que pode ser previamente determinado.

No grupo de estudos...

Uma das professoras participantes do grupo percebeu, a partir do experimento e sem esclarecimentos prévios, o que tínhamos como objetivo

principal ao propor a questão: a ideia de aleatoriedade. Contudo, uma segunda professora acreditava que os resultados do experimento deveriam expressar uma sequência regular, como cara, coroa, cara, coroa.. e o fato de termos anotado todos os resultados obtidos, como sugerido anteriormente, foi crucial para o entendimento final da professora.

Na avaliação do encontro feita por Paula, lê-se: *“Este estudo de Probabilidade com os jogos de cara e coroa foi super interessante. Mostra aproximação das duas dar cara ou coroa são mínimas ou elas por terem duas faces podem ocorrer de ser 50% cara e 50% coroa. Acho muito interessante isso ser trabalhado em sala de aula (em grupos, mostrando aleatoriedade de cara e coroa). E isso ajuda a sala de aula a tornar a matemática menos cansativa”*.

2ª atividade – Jogo: Lançamento de moedas

Objetivos:

- Trabalhar a capacidade de conceber o sucesso aleatório como sendo um resultado entre os muitos possíveis dentro de um experimento aleatório.
- Desenvolver a capacidade de quantificar e fazer previsões em situações que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar o espaço amostral de um experimento.

Realização:

Organizar os participantes em duplas, após dar as orientações de quando cada jogador vence, deixar que eles definam entre si quem será o jogador A e quem será o jogador B. Cada dupla recebe duas moedas. Cada

integrante da dupla lançará sua moeda simultaneamente, 70 vezes. Registrar os resultados.

Orientações:

O jogador A marca ponto se as faces das moedas voltadas para cima forem **as mesmas**.

O jogador B marca ponto se as faces das moedas voltadas para cima forem **diferentes**.

Vence o jogador com maior número de pontos.

Após a realização de todos os lançamentos por todas as duplas, os alunos podem responder aos seguintes questionamentos:

- a) Quem venceu o jogo?
- b) Você acha o jogo justo? Por quê?
- c) O que é mais fácil de acontecer neste jogo?
- d) Um professor realizou esta atividade com seus alunos e o jogador B pediu para se tornar o jogador A, afirmando que ele teria mais chance de vencer já que ganharia com (c,c) ou (k, k) e o jogador B só teria uma opção. Você acha justa a reivindicação do aluno?

Comentários:

Espera-se que o aluno construa o espaço amostral deste experimento para prever ou analisar os resultados obtidos. Se isso não acontecer espontaneamente, o professor poderá sugerir a construção. É importante que o aluno perceba a Probabilidade envolvida, concluindo que o jogo é justo independentemente de ter ganhado ou não.

Em nossa pesquisa, optamos por seguir a ordem aqui exposta para a realização de experimentos com moedas: uma experimentação simples para verificar a Probabilidade de sair cara ou coroa em um lançamento de moedas; uma competição entre dois jogadores com as mesmas probabilidades de vencer e um jogo onde um dos jogadores terá mais chances de vencer (próximo). Desejávamos que as professoras percebessem a importância de se compor o espaço amostral de um experimento bem como de se calcular a probabilidade a partir deste. Contudo, acreditamos que a variação na ordem entre a segunda e a terceira atividade também possa surtir resultados positivos e atingir os objetivos propostos a contento.

No grupo de estudos...

No grupo de estudos, na ocasião da realização desta atividade, o espírito competitivo das professoras estava no auge. Como Alice havia perdido para Bruna no “jogo da diferença”, por aceitar ser a jogadora B “no impulso”, desta vez ela pediu um tempo para pensar antes de escolher, criando de antemão o espaço amostral (“tabelinha”) e calculando as probabilidades.

Durante o momento de discussão da atividade, a pesquisadora pergunta:

Pesquisadora: Vocês acham que o jogo foi justo?

Alice: Esse foi justo porque era cara e coroa. Então, quais eram as Probabilidades? Dar cara e cara, cara e coroa, coroa e cara e coroa e coroa. Então, era 50% para um e 50% para outro. Então, neste caso, a Probabilidade era a mesma. Então ele é justo.

Pesquisadora: O que te ajudou a descobrir isso?

Alice: Fazer a tabelinha. Eu perdi aquela vez. Então, eu pensei: 'deixa eu fazer aqui primeiro para eu saber o que está acontecendo'.

Ao socializarmos nossas respostas ao questionamento de letra “d”, houve uma longa discussão sobre a questão de repetir o experimento para o aluno que afirmou que o jogador B só teria uma opção. Todas concordaram que o experimento deveria ser repetido para o aluno, mesmo ele não fazendo uma argumentação correta. Alice completou dizendo que não podemos deixar os alunos com uma ideia errada.

3ª atividade - Jogo: Lançamento de moedas (Mudando um pouco o rumo...)

Objetivos:

- Trabalhar a capacidade de conceber o sucesso aleatório como sendo um resultado entre os muitos possíveis dentro de um experimento aleatório.
- Desenvolver a capacidade de quantificar e fazer previsões em situações que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar o espaço amostral de um experimento.

Nota: Os objetivos deste jogo são os mesmos do jogo anterior. Contudo, espera-se que a importância de se listar o espaço amostral ganhe destaque.

Realização:

Mudando um pouco o rumo...

Os integrantes das duplas jogam suas moedas simultaneamente e anotam os resultados.

O jogador A marca ponto "**se ambos os lados saem cara**", enquanto que...

O jogador B marca ponto "**Quando sai uma cara e uma coroa**".

Observar os resultados obtidos em 50 rodadas (para cada dupla, ainda que o número de duplas na sala seja elevado).

Possíveis questionamentos (anotar os totais no quadro):

- Quantas vezes A ganhou?
- Quantas vezes B ganhou?
- Quantas vezes nenhum dos dois ganhou?

(Levantar a hipótese de uma revanche e jogar as moedas mais 50 vezes.

Anotar novamente os resultados.)

- Quantas vezes cada jogador ganhou agora?
- E se juntarmos os resultados dos dois jogos?
- Qual é o conjunto de todos os resultados possíveis, jogando duas moedas?
- O que é mais fácil na experiência anterior: sair duas caras ou sair uma cara e uma coroa? Por quê?
- Você acha este jogo justo?
- Espera-se que, após os lançamentos, conclua-se a vitória de B. Se isto acontecer, levantar a questão: "Você acha que é uma coincidência B vencer os dois jogos? Por quê?"

Comentários:

Espera-se que o aluno perceba que as chances de vencer o jogo dependem de sua escolha. A atenção que ele dispensar com a leitura e interpretação do enunciado serão fundamentais. Mais uma vez, as chances e

probabilidades poderão ser observadas a partir da criação do espaço amostral.

Os resultados dos lançamentos devem ser anotados no quadro, para visualização e posterior análise. Caso o número de duplas seja muito grande, selecionar algumas duplas e anotar todos os resultados destas (utilizando a notação de par ordenado). Tal procedimento contribuirá pra que os alunos que não criaram o espaço amostral antes de escolherem qual jogador seriam, percebam a importância de fazê-lo, como forma de prever resultados. Durante a discussão dos resultados, seria interessante anotar também todos os totais de vitórias do jogador A e do B, por dupla, no quadro.

A partir das discussões do grupo, concluímos que as duas variações do jogo podem ser trabalhadas em turmas das séries finais do Ensino Fundamental, a partir do 6º ano, dada a importância de se aproveitar a oportunidade para que o conceito de espaço amostral seja formalizado. Durante o jogo devem ser realizados questionamentos que levem o aluno a formalizar o conceito de sucesso aleatório bem como a fazer previsões, condições fundamentais ao desenvolvimento de seu pensamento probabilístico.

No grupo de estudos...

Mesmo após a realização do jogo e perder para Alice, Paula não percebe que, ao aceitar ser a jogadora A sem questionar, sua Probabilidade de vencer é menor que a de Alice que, imediatamente após a leitura da atividade, construiu seu espaço amostral e manteve-se firme no propósito de ser a jogadora B, alertando para sua provável vitória.

Durante a socialização das respostas, Alice utiliza as moedas e o espaço amostral que construiu para convencer Paula de que o jogo não era justo. Finalmente Paula concorda com Alice e afirma não ter percebido que sua Probabilidade de vencer seria menor, no ato da escolha. Apresentamos a seguir, o trecho da transcrição das falas do grupo quando Alice, que havia perdido para Bruna no encontro anterior, venceu o jogo de Paula e comentou sua estratégia:

Alice: Mas essa eu sabia que ia ganhar.

Pesquisadora: Isso. Por que é que você sabia? Paula, você tem certeza de que não foi prejudicada? Ninguém tem mais chance de ganhar que o outro?

Paula: Olha, neste caso aí, como teria que ser diferente, não, é, se uma face é cara e a outra é coroa, com certeza.

Pesquisadora: Você não acha que foi prejudicada não?

Paula: Não!

[...]

Alice: Não eram quatro eventos? Quatro situações que poderiam acontecer. Ou coroa e coroa, ou cara e cara, cara e coroa e coroa e cara? Então, eu tinha duas possibilidades. E você, tinha quantas? Você tinha uma possibilidade. Por que se você fosse igual na jogada anterior, no jogo anterior, você, tudo bem, teria 50% e eu 50%. Aqui não. Aqui você tinha 25% de chances de ganhar. Eu tinha 50% de chances de sair eventos de cara e coroa, você tinha 25% de chances de sair só cara e cara e tinha 25% de chances de ninguém ganhar.

Pesquisadora: Mas agora você concorda que você tinha menos chance de você ganhar?

Paula: Eu sei, mas ela escolheu a outra... eu ia bater o pé? Uai, a possibilidade de eu perder era essa mesmo.

Alice: Mas aí você teve menos chance.

Pesquisadora: Eu sei, mas a princípio você não percebeu isso, não é? Agora você... [...]

Paula: Eu acho que você acredita naquilo que você vê. Se não vê, não acredita.

Alice: Mas sabe por que é que eu percebi? Agora eu tenho que defender a Paula, é o caso de a gente fazer experimentos diferentes. Por quê? Porque quando eu tava jogando na semana passada com a Bruna, aí a Bruna viu. Por ela ter mais maturidade no assunto, escolheu e falou: eu vou ganhar. Aí, depois de eu já ter essa experiência do sábado anterior, eu vi que é o que a gente tem que mostrar pro aluno, ele joga e depois ganha maturidade. O aluno vai aprender realmente.

No grupo de estudos, a cada encontro, as professoras tiveram a oportunidade de perceber o quanto a realização de experimentos pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento probabilístico. Como estas atividades foram desenvolvidas nos primeiros encontros, foram trabalhados, a partir delas, basicamente conceitos iniciais como aleatoriedade e espaço amostral. Contudo, dependendo do nível de conhecimento que a classe possui sobre Probabilidade e da criatividade do professor, outros conceitos podem ser trabalhados e desenvolvidos durante a realização das mesmas.



Fig. 2: Material utilizado durante os experimentos

A escolha de um carro para comprar

Objetivos:

- Calcular a Probabilidade a partir do enfoque clássico.
- Explorar as ideias de acaso e de aleatoriedade.
- Mobilizar as noções de eventos dependentes, a união, interseção e a negativa de um evento (complemento).

Realização:

Um cliente vai a uma loja de carros usados para comprar um carro e percebe que o modelo que ele procura está disponível em três cores diferentes: vermelho, preto e prata, todos com o mesmo ano de fabricação. No pátio da loja há 2 veículos vermelhos, 4 pretos e 1 prata. Gostando das três cores e com a informação de que todos os carros são exatamente iguais, com exceção da cor, decide escolher ao acaso uma chave na mesa do vendedor e comprar o carro. Qual é a Probabilidade de que ele compre um carro prata? Justifique.

Podem ser discutidas outras questões:

- a) A escolha da chave é feita ao acaso? Justifique.
- b) Podemos escrever todas as possibilidades de resultados antes da escolha da chave? Se sim, quais? Se não, justifique.
- c) Se a cada carro vendido pudermos supor que a loja repõe a cor vendida de forma a manter o estoque sempre o mesmo, podemos repetir o processo de escolha da chave ao acaso tantas vezes quantas desejarmos, sempre nas mesmas condições. Neste caso, que característica você identificaria neste experimento?

Comentários:

O problema proposto exige o cálculo de probabilidades, logo, demanda algum conhecimento sobre o assunto por parte dos alunos. Contudo, sugerimos que o desenvolvimento do problema não se limite ao cálculo, dada a importância das questões discursivas propostas e da posterior socialização de respostas da classe. A atividade pode ser adaptada e melhor explorada durante o trabalho com a Probabilidade condicional. Dessa forma, de acordo com a pretensão do professor e o nível de desenvolvimento da turma, as adaptações farão-se necessárias. Em sua forma mais simples, pode ser trabalhada nas séries finais do Ensino Fundamental. Caso seja aproveitada no Ensino médio, poderá ser reformulada de forma a considerar a Probabilidade condicional.

No grupo de estudos...

Para cada atividade proposta, as professoras tinham um tempo para realizar a leitura e a interpretação desta. Só depois de responderem suas questões é que cada uma apresentava e discutia seu resultado com o grupo.



Fig. 3: Bruna realizando a atividade

Durante a discussão, aproveitamos o momento para falar um pouco da história da Probabilidade, de como ela surgiu e quando viria a ser considerada parte da Matemática, dos jogos de azar e, principalmente, do enfoque clássico. A regra de Laplace já havia sido trabalhada em encontros anteriores e esta prática estava sendo fortalecida a cada encontro.

Durante a apresentação de suas respostas, as professoras tiveram a oportunidade de amadurecer, com o grupo, suas concepções sobre acaso, aleatoriedade, possibilidades e probabilidades. Recortamos um trecho da transcrição do encontro onde podemos perceber que, durante o trabalho com as noções de Probabilidade, termos probabilísticos e regras envolvendo

cálculos simples, podem ocorrer confusões com o uso de termos e interpretação de questionamentos realizados.

⁴Alice: A Probabilidade é $1/7$. 14,3 aproximadamente, porque é 1 dividido por 7. Deu uma possibilidade num total de sete.

Pesquisadora: Que regra que é essa, Alice?

Alice: Fração.

Pesquisadora: Ah, tá. Você usou fração. Mas que regra que, tem um nome. Lembra da semana passada?

Alice: Ah, gente. Tem mesmo! Regra de Laplace. [...]

Pesquisadora: Tá. A gente pode escrever todas as possibilidades de escolha das chaves?

Bruna: Sim. Sete resultados.

Pesquisadora: Quais?

Bruna: Pode ser preto, preto, preto, preto, vermelho, vermelho e prata.

Alice: Eu coloquei só porcentagem. Coloquei 28,6% aproximadamente. 57,1% do preto aproximadamente e o prata 14,28% aproximadamente.

Pesquisadora: A Bruna falou todas as possibilidades. Ela listou todas e as possibilidades são essas mesmo. Carro preto, preto, preto, preto, vermelho, vermelho e prata. Não é? São todas as possibilidades. E a Alice colocou os resultados, fazendo de novo, o quê?

⁴ Em resposta à pergunta da pesquisadora: “Bem, qual é a Probabilidade de ele comprar um carro prata? Justifique.”

Alice: Teoria de Laplace.(imediatamente)

Pesquisadora: Você comparou o resultado que você queria...

Alice: Com todas as possibilidades.

Consideramos que tais questões devem ser abordadas em um contexto que valorize o trabalho com as ideias iniciais do indivíduo sobre o tema, que privilegie o diálogo e proporcione a aprendizagem coletiva.

O jogo de cartões da Paula

Objetivos:

- Reforçar a ideia de aleatoriedade. Observar que sequências que seguem um padrão não são aleatórias.
- Trabalhar a existência da equiprobabilidade (eventos igualmente prováveis), eventos independentes e as noções de acaso, azar e sorte.

Realização:

Paula tem um jogo composto por 16 cartões numerados de 1 a 16. Ela coloca os cartões em uma caixa fechada e a sacode com força, misturando-os bem. Depois, retira um cartão ao acaso e é o 7. Ela marca com um “x” o número 7.

1	2	3	4
5	5	7x	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Cada jogador retira uma ficha da caixa e marca o número retirado. Eles realizam o experimento 16 vezes, sempre recolocando a ficha retirada na caixa antes de efetuar uma nova retirada. Outras crianças jogaram o mesmo jogo, ainda que algum (ns) tenha(m) “trapaceado”. Observe seus resultados:

X	x	x	X
x	x	x	X
X	x	X	x
x	x	X	X

Jaime

X _x x		X	
	x	XX	X
x	x		xX
	xx		

Luis

xx	XX		
		xX	XX
	XX		XX
	xx		xx

Maria

		x	xx
		Xx	XX
x	xX		
x	Xxx		

Jesus

Questões:

- O modelo aleatório pode ser aplicado a essas situações?
- Como você poderia justificar que crianças “trapacearam”? Baseado (a) em que você tirou esta conclusão?
- Faça uma lista de situações da vida real em que o modelo encontrado possa ser útil e pense em que pessoas estão interessadas em resolver problemas semelhantes ao que foi dado.

(Adaptado de BATANERO, C. Didáctica de la estadística, 2001, p. 18)

Comentários:

Sugerimos que as fichas sejam confeccionadas e que o experimento seja realizado, se possível, por cada aluno da classe. As fichas devem ter as mesmas formas e medidas, sendo numeradas de 1 a 16. Cada aluno recebe as fichas e um saco não transparente. Realiza dezesseis retiradas, sempre recolocando a ficha no saco entre uma retirada e outra. O professor pode pedir que o aluno crie uma tabela numerada de 1 a 16, para marcar com um “x” o resultado obtido em cada retirada.

Consideramos importante manter a ordem de realização aqui proposta: que os alunos avaliem possíveis trapaças de outros indivíduos utilizando suas ideias iniciais antes de realizar o experimento. Caso sua concepção não esteja correta, ao invés de aceitar uma resposta pronta, ele poderá realizar seu próprio experimento e analisar este e os de outros alunos da classe. Na hipótese de sua ideia inicial já estar correta, ele poderá reforçar sua concepção a partir da atividade prática.

Esta atividade poderá ser realizada desde o 5º ano até as séries finais do Ensino Fundamental. Contudo, apostamos nesta atividade como um meio de se reforçar a ideia de experimentos aleatórios com os alunos, não como uma forma de se introduzir esta. Apesar da aparente simplicidade do exercício, considerando-se que resultados são apresentados ao aluno para que os avalie antes que este realize seu experimento, esta atividade deverá ser proposta a alunos que já realizaram algum experimento aleatório e que tenham alguma noção sobre previsão de resultados. Dessa forma, o desenvolvimento do pensamento probabilístico será privilegiado, dada a

natureza da atividade e o leque de questionamentos possíveis, que poderão ser adaptados pelo professor de acordo com a realidade da turma.

No grupo de estudos...

As professoras tiveram a oportunidade de realizar o experimento no grupo. Todas receberam um saco não transparente com fichas numeradas de 1 a 16. Enquanto uma professora efetuava as retiradas, com reposição, outra anotava os resultados no quadro da sala.

Professora I

1 X	2 XX	3 XX	4 XX
5 X	6	7 X	8 XX
9	10	11 X	12
13 X	14XX	15 X	16

Professora II

1 XX	2 X	3 XX	4 X
5 X	6XXX	7	8
9	10	11 X	12XX
13	14 X	15	16XX

Professora III

1 XX	2	3	4
5 X	6	7	8 X
9 XX	10 X	11 X	12XXX
13XXX	14	15XX	16

Os
result
ados

obtidos foram analisados e as professoras destacaram os números que saíram com maior frequência para cada professora e aqueles que não saíram. Apresentamos, em seguida, os resultados obtidos por Batanero (2001) às professoras.

Alice afirmou que o resultado de Jaime poderia ocorrer, que não seria impossível, durante a análise do problema. Após realizarmos as retiradas e observarmos os resultados, ela completa que o mesmo dificilmente ocorreria.

Paula, a princípio, acreditava ser o resultado de Jaime o mais provável. Após realizarmos as retiradas e observarmos os resultados, ela se convence

de que ele possa ter trapaceado. Apresentamos alguns recortes do diálogo realizado no grupo.

Pesquisadora: É. Comparando os nossos resultados com o do pessoal aqui (voltando aos resultados apresentados na atividade proposta)...

Bruna: Não deu muito diferente não. Só o Jaime que perderia, não é?

[...]

Pesquisadora: É. Se a gente der a questão aos alunos para eles analisarem. Se eles tiveram a ideia inicial, como a Bruna falou, de que vai sair um número de cada um e achar que o Jaime é que está certo e que os outros estão errados, trapaceando, aí depois de realizarem o experimento, a que conclusão eles vão chegar?

Paula: A de que o Jaime está errado. Que ele é que trapaceou.

Bruna: Eu acho que se fizer o experimento, eles vão afirmar que o Jaime errou.

Pesquisadora: Afirmar com certeza?

Bruna: É. É o que eles vão afirmar.

Pesquisadora: E isso pode ajudar a eles em algum sentido?

Bruna: Eles vão ter uma ideia aleatória, não é? Não uma porcentagem. Acho que nisso vai mais é a maturidade, com o tempo.

Pesquisadora: E aí, gente, o que vocês têm para me falar do encontro?

Bruna: Foi bom, não é? Isso aí são atividades que realmente dá para fazer dentro de sala de aula.

Em todos os momentos de discussão sobre respostas e resultados, pensávamos no que nossos alunos responderiam e até comparávamos com nossas respostas.

Adivinhando as fichas

Objetivos:

- Um objetivo da atividade era encontrar a melhor estratégia para se ganhar o jogo, buscando contribuir para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.
- Com esta atividade, pretendíamos também reforçar as ideias de chance, acaso, aleatoriedade.
- Reforçar o trabalho com a probabilidade condicional.
- Finalmente, almejávamos criar uma discussão a partir das ideias de sorte e azar, uma vez que o jogo seria realizado e teríamos vencedora(s).

Realização:

A professora (ou um aluno) apresenta à classe três fichas com a mesma forma e tamanho, das quais uma é vermelha em ambos os lados, outra tem um lado azul e o outro vermelho e a terceira é azul em ambos os lados. A professora coloca as três fichas em uma caixa e a balança por um tempo antes de retirar uma das três fichas de forma aleatória. Apresenta à classe, em seguida, uma das faces da ficha selecionada, mantendo o outro lado coberto e pedindo aos alunos para adivinharem a cor do lado escuro. Uma vez que as apostas fossem feitas, a professora mostra o lado escuro. Cada aluno que tenha acertado na previsão feita ganha um ponto. Trata-se de encontrar a melhor estratégia para se jogar este jogo.

a) Que tipo de raciocínio que você fez (ou faria) para confirmar que sua estratégia é ótima?

b) Um argumento com base na experimentação é igualmente válido a um argumento formado com base em considerações lógicas e combinatórias?

b) Você pode provar que sua estratégia é a melhor utilizando apenas experimentação? Há alguma maneira de formalizar sua estratégia? (Adaptado de Batanero, C. Didáctica de la estadística, 2001, p. 20)

Comentários:

Em geral, neste tipo de atividade, os alunos inicialmente se deixam levar pela intuição, ou mesmo escolhem a cor do verso imaginando que as chances de sair azul ou vermelho são iguais. Entretanto, se o aluno já tem a noção de Probabilidade condicional, acreditamos que ele irá refletir um pouco mais antes de escolher a cor, ainda que não calcule a Probabilidade numérica para o evento em questão.

Outra boa sugestão para se aplicar esta atividade seria na primeira aula de Probabilidade condicional, antes de iniciar os trabalhos sobre o assunto. Desta forma, o professor teria a oportunidade de conhecer as ideias iniciais dos alunos, explorando a atividade de forma mais abrangente. A Probabilidade condicional costuma ser trabalhada no Ensino Médio, contudo, não vemos entraves em se trabalhar tal conceito no 9º ano, desde que as noções de Probabilidade já estejam sendo trabalhadas com a turma desde os anos iniciais. Percebemos, durante o trabalho com a Probabilidade condicional no grupo, que tal conceito provoca dúvidas na maioria dos professores de Matemática. Dessa forma, aconselhamos que o professor possua um conceito muito bem formado ao trabalhar tal conteúdo, que vá além da aplicação da fórmula, já que podem surgir questionamentos diversos,

que envolvem várias partes do ensino de Probabilidade, e que não podem ficar sem uma resposta.

No grupo de estudos...

A princípio, as professoras não perceberam a existência da Probabilidade Condicional neste jogo. Permitimos que Alice e Bruna tentassem convencer Paula de que sua estratégia era a melhor, para observarmos seus argumentos e, possivelmente, justificar o uso da Probabilidade Condicional utilizando a mesma técnica que elas usaram para tentar convencer Paula: as fichas coloridas.

Na discussão final desta atividade, as professoras afirmaram não ter percebido o que aconteceria com a face oculta da ficha, por ficarem muito presas ao cálculo da Probabilidade que Bruna fez no início da atividade. Antes de passarmos para a atividade seguinte, elas confirmaram a afirmação utilizando novamente as fichas.

Ao percebermos que as professoras não estavam muito familiarizadas com o uso desta Probabilidade lançamos mão de outras atividades para reforçarmos este estudo. A partir do encontro seguinte ao que trabalhamos a atividade com as fichas, levamos para o grupo textos adaptados de artigos de Batanero, onde o uso (ou não uso) da Probabilidade condicional na vida cotidiana influenciou positiva ou negativamente tomadas de decisão.



Fig. 4: Fichas entre alguns dos materiais do grupo

Ao avaliarmos o encontro, observamos o impacto do empenho de Alice e Bruna em apoiar Paula, ajudando-a a esclarecer suas dúvidas, bem como as construções pessoais. Ao tentar ensinar, aprendemos muito.

A porta dos desesperados

Objetivos:

- Encontrar a melhor estratégia para o jogo.
- Realizar a atividade a partir de uma maquete, discutir os resultados para posteriormente realizar a simulação no computador e analisar as estatísticas obtidas (das milhares de simulações já realizadas).

Realização:

Um professor de matemática sugeriu a seguinte questão para uma turma de alunos da Educação Básica:

Suponha que você seja um participante de um programa de auditório e o apresentador mostra a você três portas fechadas. Ele diz que atrás de uma das portas está um carro, e atrás das outras duas há apenas cabras. Se você escolher a porta certa, ganha o carro – caso contrário, levará apenas uma cabra. Você escolhe uma das portas. O apresentador, então, sem abrir a porta que você escolheu, dirige-se para uma das outras duas portas que sobraram. Como ele sabe em qual das três portas está o carro, ele então abre uma das duas portas que você não tinha escolhido – exatamente uma porta que escondia uma cabra. Restaram, então, apenas duas portas fechadas: aquela que você tinha escolhido, e uma outra que não foi aberta pelo apresentador. Atrás de uma delas está o carro.

O apresentador, então, pergunta se você quer manter a escolha original ou se quer, agora, trocar de porta, escolhendo a outra que ele não abriu e que pode conter o carro.

O que você deve fazer?

1 – manter a escolha original, ou 2 – trocar de porta?

Atenção: a posição do carro e das cabras não muda durante o programa; está definida no início e permanece a mesma durante a rodada inteira.

Comentários:

No grupo a atividade foi apresentada com respostas de supostos três alunos para serem avaliadas pelas professoras, logo, tinha um objetivo a mais.

Cada professora realizou a atividade em momentos diferentes para que não conhecessem a localização do carro e das cabras. Foi realizada também a simulação no computador, no encontro seguinte.



Fig. 5: Maquete utilizada na atividade “A Porta dos Desesperados”

No grupo de estudos...

No grupo, todas as professoras mantiveram a porta escolhida por elas a princípio, movidas pela intuição, sem realizarem o cálculo da Probabilidade. Apresentamos a solução a seguir e as professoras mostraram-se satisfeitas e convencidas com ela.

Exemplo de raciocínio para perceber-se que “vale a pena” trocar de porta:

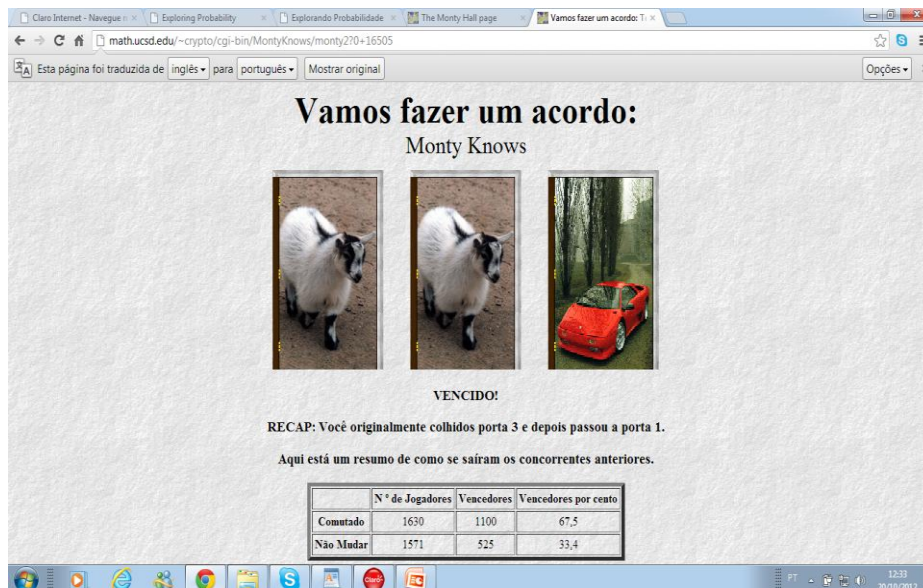
Considerando, por exemplo, que o carro esteja na porta 1.

1ª situação: Paula escolheu a porta 1, abro a porta 2 (neste caso, ou 3), se trocar de porta, troca carro por cabra (Probabilidade $1/3$).

2ª situação: Paula escolheu a porta 2, abro a porta 3, se trocar de porta, troca cabra por carro. (Probabilidade $1/3$)

3ª situação: Paula escolheu a porta 3, abro a porta 2, se trocar de porta, troca cabra por carro. (Probabilidade $1/3$)

Para reforçarmos a ideia de que não existe uma única forma de se trabalhar com os conceitos de Probabilidade, lançamos mão de mais um recurso, o computador. As professoras puderam, além de resolver o problema das cabras, realizar em uma página HTML⁵, a simulação de experimentos com moedas, dados, gôndolas divididas em frações com cores diferentes. O *site* oferecia, ainda, uma estatística de todas as simulações realizadas, cujos valores, quando se decide por trocar de porta, se aproximam muito de 67%. A seguir, apresentaremos algumas imagens como forma de ilustrar parte dos resultados obtidos para este problema quando realizado no computador.



	N° de Jogadores	Vencedores	Vencedores por cento
Comutado	1630	1100	67,5
Não Mudar	1571	525	33,4

⁵ Utilizamos: < <http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html>> e < <http://staff.argyll.epsb.ca/jreed/math8/strand4/4201.htm>>

Fig. 6: O Problema das Cabras - Trocando carro por cabra



Fig. 7: O Problema das Cabras - Trocando cabra por carro

Apresentamos um pequeno trecho da conversa durante a realização do experimento:

Alice: Então vai lá que hoje eu vou trocar de porta.

(Alice escolhe a porta a porta 3, o computador abre a porta 2 e Alice muda para a 1 e é vencida)

Alice: Ai não! Eu perdi! (risos) Não, mas eu sabia que podia acontecer. Não vou falar que é sorte. Eu deveria ter trocado mesmo.

Pesquisadora: Com certeza?

Alice: Sim. Olha lá (mostrando a tela do computador e se referindo às estatísticas que ele apresenta ao usuário): a maioria que muda de porta ganha.



Paula: Esse aí não tem jeito. Tem que mudar mesmo!

Pesquisadora: Agora você joga, Paula!

Paula: Vamos lá! Sou eu. Vamos ver se ganho um carro...

(Paula escolhe a porta a porta 1, o computador abre a porta 3 e Alice muda para a 2 e vence o jogo)

Paula: Oba! Consegui ganhar o carro.

Pesquisadora: Alguma coisa a dizer?

Paula: Esse não foi sorte; foi a Probabilidade.

Em sua avaliação do encontro, Paula escreveu:

“Cheguei à conclusão de que, matematicamente, eu deveria ter mudado, nesse caso, a chance de ter o carro era de $2/3$. A chance de ganhar o carro era bem menor, depois da troca a chance de ganhar o carro aumenta.”
(Paula, 22/09/2012)

Análise e discussão de textos que envolvem o cálculo de Probabilidades

Objetivos

- Reforçar o trabalho com a Probabilidade condicional por meio de uma abordagem diferente da adotada até então.
- Desenvolver a capacidade de analisar e criticar decisões tomadas com base no cálculo inapropriado da Probabilidade.
- Perceber os usos e abusos do cálculo de Probabilidades em situações reais e como um erro neste cálculo pode influenciar tomadas de decisões.

Realização

Na terceira atividade do 8º encontro, discutimos trechos de um artigo de Batanero⁶. A princípio, são distribuídas apenas “tirinhas” com fragmentos do texto para que se inicie uma discussão. Após expressarem suas ideias, independentemente do desfecho que o caso teve (o texto referia-se a acontecimentos reais), deve-se discutir o restante do texto. Os trechos foram retirados de um artigo de Batanero⁷.

Texto 1

No Reino Unido, Sally Clark foi acusada de assassinar seus filhos quando dois deles sofreram sucessivamente de morte súbita do recém-nascido. Sally foi separada de sua família e ficou presa por três anos até que um juiz decidiu rever todos os casos de morte súbita e observou que, a cada ano, no Reino Unido, cerca de 50 casamentos que haviam perdido um filho por morte súbita, perdiam um segundo. Sally Clark foi então declarada inocente, mas ninguém poderia devolver os três anos de vida familiar perdidos.

a) Você acredita que o cálculo de Probabilidades possa contribuir para decisões judiciais corretas?

() sim () não.

Se sim, que medidas seriam necessárias para que a Probabilidade calculada se torne consistente não apenas através do resultado numérico obtido?

b) Você acredita que o indivíduo que possui algum conhecimento sobre o cálculo de Probabilidades poderá utilizá-lo a seu favor (ou defesa) em alguma situação cotidiana? Se sim, escreva um exemplo.

⁷ Razonamiento Probabilístico En La Vida Cotidiana: Un Desafío Educativo. Ver bibliografía.

c) Nesse contexto, é possível que o desenvolvimento do pensamento probabilístico possa contribuir para a formação de um indivíduo mais crítico e atuante na sociedade? Por quê?

Texto 2

A Falácia do Ministério Público

Suponhamos que alguém tenha cometido um assalto e se encontra uma amostra de material genético (como sangue) na cena do crime. Esta amostra é comparada com os dados disponíveis em 20000 casos de registros policiais e se encontra uma coincidência entre o DNA da amostra e o da pessoa A, cujos dados estão nos registros. Suponha-se que a Probabilidade de encontrar uma pessoa ao acaso com este tipo de DNA é de apenas 1 em 10.000. Podemos considerar que a pessoa A é culpada pelo roubo?

Claro que não! A Probabilidade de que entre os 20.000 casos registrados apareça pelo menos uma coincidência com a amostra de DNA é bastante elevada,

exatamente $1 - \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{20000} \approx 86\%$. Seria equivocado condenar a pessoa A, com esta única evidência. No entanto, este erro conhecido como “A falácia do Ministério Público”, aparece com frequência em processos judiciais ou na imprensa. Por exemplo, o jornal *el País* publicou, em setembro de 2003, uma notícia sobre os resultados da análise de DNA dos restos encontrados no corpo de Sonia Carabantes, afirmando que a Probabilidade de que estes pertencessem à mesma pessoa que havia deixado suas impressões digitais genéticas um cigarro encontrado junto ao corpo de Rocio Wanninkhof era de 99.999997%.

A razão é que, ao comparar a amostra com seus arquivos, a Polícia encontrou uma coincidência com as encontradas no citado cigarro (Corberán y Montes, 2003). É possível que outros tipos de evidências envolvessem a mesma pessoa em ambos os casos, mas a Probabilidade calculada pelo jornal *el País* estava incorreta. Algumas

falhas no raciocínio (geralmente raciocínio como os da falácia do Ministério Público são):

- Tomar uma pessoa ou um caso dos arquivos policiais não é o mesmo que tomar uma pessoa ao acaso, da população; pode não atender o pressuposto de independência.
- Ter investido em uma Probabilidade condicional. Considere os eventos: A "encontrar um certo DNA " e B" escolher uma pessoa aleatória na população." Podemos, a partir deles calcular duas Probabilidades condicionais $P(A/B)$, "tomando um indivíduo extraído aleatoriamente da população, que essa pessoa tenha o DNA dado", e $P(B/A)$: "tomar um certo DNA, que uma pessoa escolhida aleatoriamente da população o tenha. "

A Probabilidade calculada pelo jornal *el País* foi $1 - P(B/A)$, uma vez que a pessoa envolvida no caso Carabantes tinha o DNA estudado, foi a Probabilidade de que essa pessoa não fosse uma pessoa qualquer, tomada ao acaso a partir da população. Uma vez que a Probabilidade é muito elevada, $P(\text{não } B/A) = 1 - P(B/A) = 99,999997\%$ o resultado deduzido foi que a pessoa não era aleatória, mas a mesma envolvida no caso anterior.

No caso acima mencionado, você pode ter outras provas que envolvessem a mesma pessoa em ambos os crimes, o comentário acima se refere apenas ao equilíbrio das Probabilidades utilizadas em um jornal nacional, mostrando um exemplo da assim chamada falácia condicional (Falk, 1989), que consiste em confundir utilizando a Probabilidade condicional $P(A/B)$ e $P(B/A)$.

Comentários

A princípio, as professoras ficaram um pouco "tímidas" ao comentar o texto. Desde o início do trabalho do grupo esclareceram que não estavam habituadas a trabalhar com textos, leituras e nem mesmo a escrever pequenos textos. Contudo, a partir da primeira leitura, já estavam

completamente envolvidas com a atividade. Como eram textos que expressavam casos reais, a discussão se apresentou polêmica desde o início, possibilitando que se abrisse um leque de opiniões e de soluções para os casos.

Existe uma grande vantagem em se trabalhar textos durante o ensino de Probabilidade: não há restrições quanto à faixa etária. O professor deve escolher e fazer as devidas adaptações aos textos de acordo com o nível de sua turma. Acrescentamos que o texto deve propiciar uma boa leitura e entendimento da realidade, sempre explorando o raciocínio probabilístico. No caso dos textos aqui apresentados, como no momento o grupo buscava reforçar o trabalho com a Probabilidade condicional, todos exploravam o tema. É importante que o professor saiba o momento certo de se trabalhar com textos durante o ensino de Probabilidade, seja como uma abordagem a mais ou como uma maneira de reforçar o ensino de um conteúdo que precise ser melhor trabalhado.

No Grupo de estudos...

Vejamos alguns 'recortes' da discussão sobre o texto 2:

Pesquisadora: Qual foi o problema ao calcular a Probabilidade? O que eles fizeram de errado na hora de calcular essa Probabilidade?

Alice: Porque eles já tinham um culpado e desse culpado eles calcularam essa Probabilidade em cima dele. Se eles calculassem em cima da população, os resultado seriam diferentes. Foi isso?

[...]

Alice: Quem faz faculdade de Direito tem que fazer probabilidade de qualquer jeito! É que nesse caso o advogado, tanto de defesa quanto de acusação pode... Isso que eu falo, é um "Q" a mais, porque quando você fala que o jornal falou que era 99,99997...% todo mundo tinha certeza...

Paula: E se você for ver a probabilidade exatamente é de 86%. Quer dizer: de 99,99997% para 86%, para condenar uma pessoa... muda.

Alice: Muda. Se você está em um júri popular e você fala que a pessoa tem 99,9% de probabilidade e explicar que tem 86% de chance de ser muda muito.

Pesquisadora: Bem pensado. E se ele fizer a análise erradamente, que nem o jornal fez?

Alice: Você está induzindo.

Pesquisadora: É igual a Alice falou: é um júri popular, todo mundo que estiver lá vai estar a favor de 99,9%

Alice: Você usa a matemática a seu favor.

Pesquisadora: E muitas vezes ela é incontestável. Muita gente que está lá pode não entender nada de probabilidade, mas alguém calculou e falou que era 99,9%?!

Alice: É igual nesse caso aqui. Foi um jornal e deve ser um jornal sério dentro do país.

Pesquisadora: É o El País. O El País é conhecido no mundo todo.

Alice: E o que é que acontece, a porcentagem da população que vai duvidar e querer fazer o cálculo vai ser mínima.

Paula: É por isso que eu não concordo de, às vezes, você prender uma pessoa sem ter a certeza de que ela é inocente ou culpada. Acho que para você prender uma pessoa você precisa saber mesmo!

Pesquisadora: E você acha que a Probabilidade pode ajudar ou atrapalhar?

Paula: Acho que está tudo bem em usar a probabilidade. Só acho errado eles irem direto na pessoa; sem pesquisar se havia outros casos. É isso que eu acho errado. Probabilisticamente, poderia até ser, mas é preciso ter certeza, uai!

Em sua avaliação, Paula escreveu em seu caderno de campo que achou o encontro muito bom, mas que teve um pouquinho de dificuldades em interpretar o que se pedia. Como no encontro anterior, o ponto forte foi a Probabilidade condicional, ou seja, o cálculo feito através de problemas ou a partir de dados de textos.

As professoras participantes tiveram a oportunidade de verificar, por meio dos exemplos analisados, dramaticamente, as potenciais consequências de uma intuição carente sobre a Probabilidade e as possíveis decisões que tomamos em situações de incerteza. Como afirmado por Fischbein (1975, apud BATANERO, 2006), a distinção entre a acaso e dedução não é feita de forma espontânea e nem totalmente ao nível das operações formais, pois é influenciada pelas condições culturais e educacionais da sociedade moderna, que orientam o pensamento em direção a explicações deterministas.

5. Comentários Gerais

Durante o processo de investigação priorizamos a utilização de atividades (jogos, experimentações, problemas, textos) que trabalhassem a capacidade de identificar situações de acaso e de aleatoriedade tanto na vida cotidiana quanto no conhecimento científico. A realização de experimentos permitiu-nos também analisar o comportamento de situações que envolvem o azar. Ao longo de sua participação no grupo de estudos, as educadoras desfrutaram de oportunidades múltiplas de discutir o ensino de Probabilidade na Educação Básica e práticas pedagógicas. Priorizamos o trabalho com atividades que oportunizavam o desenvolvimento do pensamento probabilístico, contudo, cada uma contribuiu parcialmente. Não há uma atividade que explore todos os conceitos necessários ao desenvolvimento deste tipo de pensamento.

As atividades desenvolvidas nos encontros caracterizaram-se pela variedade de situações e pela persistência na busca pelo aprimoramento de determinados conceitos e termos probabilísticos como Probabilidade,

aleatoriedade, etc. levando-as a compreender, de modo mais profundo, o significado e a importância da Probabilidade como meio de prever resultados. As leituras e discussões permitiram ainda desenvolver a capacidade de quantificar e fazer previsões acerca de situações aplicadas a diversas áreas do conhecimento humano e da vida cotidiana, que envolvam o pensamento probabilístico.

O conjunto de atividades realizadas durante o trabalho de campo não foi construído a priori, mas partiam da demanda do grupo. Quando sentíamos a necessidade, por exemplo, de se reforçar um conceito, elaborávamos outras atividades, muitas vezes com abordagem diferente da anterior. Desta forma, aconselhamos que o professor, sempre que julgar necessário, realize adaptações nas tarefas aqui propostas, de acordo com a dinâmica de sua sala de aula, seus anseios e objetivos. Esperamos que as atividades que apresentamos neste produto educacional sejam capazes de contribuir de forma efetiva para um ensino de probabilidade de qualidade.

REFERÊNCIAS

AZCARÁTE, P. G. **¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad?** In: FLORES, P. y LUPIÁÑEZ, J. (Ed.). Investigación en el aula de matemáticas: Estadística y Azar. Granada: SAEM Thales, 2006.

BATANERO, C. **Didáctica de la estadística.** Granada (Espanha): Universidade de Granada / Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada-GEEUG, 2001.

BATANERO, C., GODINO, J. D., ROA, R. **Training teachers to teach probability.** Journal of statistics Education, v. 12, n. 1, 2004.

BATANERO, C. **Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo.** In: FLORES, P.; LUPIÁÑEZ, J. (Ed.). Investigación en el aula de matemática. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática. Thales, 2006.

BATANERO, Carmen et al. **Razonamiento Probabilístico de Profesores y su Evolucion en un Taller Formativo.** Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, v. 12, n. 2, 2010.

LOPES, C.A.E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.** Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 2003.

LOPES, C.A.E. **Os desafios para educação estatística no currículo de matemática.** LOPES, Celi Espasadin et al. Estudo e reflexões em educação estatística. Campinas: Mercado das Letras, p. 47-64, 2010.

LOPES, C. E., CARVALHO, F. D., MENDONÇA, L. **Modelagem matemática gerando a educação estocástica de futuros economistas**. Acta Scientiae, v. 14, n. 2, p. 185-199, 2012.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
Da Universidade Federal de Ouro Preto,
Agosto de 2013.
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m² e (capa) 300 g/m²

Anotações

Desenvolvendo o Pensamento Probabilístico: experiências vividas por um grupo de Professores de Matemática de Conselheiro