



MODELAGEM MATEMÁTICA REMOTA NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Aldo Peres Campos e Lopes¹

Frederico da Silva Reis²

Resumo: A disciplina Equações Diferenciais é, para muitos alunos, difícil e sem sentido, por ser muito técnica e não apresentar aplicações. Muitas vezes, são trabalhadas apenas as resoluções analíticas, sem nenhuma aplicação. A Modelagem Matemática pode ser um instrumento facilitador nesse aspecto pois, por trabalhar com fenômenos reais, o aluno pode se sentir motivado a aprender, não somente por ver aplicações da Matemática, mas também por estar em contato com outra metodologia de ensino. A pesquisa aqui descrita foi realizada com alunos de Engenharia na disciplina Equações Diferenciais, de forma remota, por meio de atividades de Modelagem Matemática. Nessas atividades, os alunos trabalharam com problemas ligados à realidade. Apesar de alguns desafios, os resultados apontam que os alunos conseguiram ressignificar os conceitos de Equações Diferenciais, modificar seu próprio olhar sobre a Matemática, e também desenvolver um pouco de sua criticidade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino de Equações Diferenciais. Cursos de Engenharia.

INTRODUÇÃO

A Matemática no Ensino Superior tem sido objeto de estudo de diversas pesquisas, o que inclui diversas práticas de ensino. Algumas disciplinas em particular são estudadas, como o Cálculo (REIS; COMETTI; SANTOS, 2019; LOPES; REIS, 2019) e Equações Diferenciais (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013). Entretanto, notamos que a quantidade de estudos a respeito da disciplina Equações Diferenciais (ED) tem sido menor, principalmente quando relacionada à Educação Matemática Crítica.

Uma forma de conduzir o ensino de ED é por meio do uso da Modelagem Matemática ou, simplesmente, Modelagem. O uso e a relevância da Modelagem têm aumentado com o tempo, tanto a nível mundial (KAISER, 2005; CAMPOS, 2018), como no Brasil (ARAÚJO, 2010). Ela é utilizada pois traz alguns benefícios e destacamos, em especial, o desenvolvimento de habilidades (KAISER; BRAND, 2015) e a motivação. Entretanto, há alguns empecilhos para o uso da Modelagem como estratégia de ensino (GEIGER, 2011).

¹ Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI; Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais; aldolopes@unifei.edu.br e Mestre em Educação Matemática, 2020, orientado por Frederico da Silva Reis.

² Doutor em Educação. Professor do PPGEDMAT



Como tem sido encontrado em diversas pesquisas de Modelagem (MALHEIROS, 2012), associamos a Educação Matemática Crítica à Modelagem, afim de contribuir para a criticidade de alunos de Engenharia, os sujeitos da pesquisa. Uma particularidade que permeou toda a Modelagem foi a forma de condução. Devido a pandemia do COVID-19, realizarmos as atividades de forma remota.

Na pesquisa que realizamos procuramos responder a seguinte questão: quais são as possíveis contribuições de atividades de Modelagem para o ensino remoto e para a aprendizagem na disciplina ED?

Apresentamos aqui uma breve visão da pesquisa realizada. A dissertação (LOPES, 2020a), que contém todos os pormenores da pesquisa aqui apresentada, pode ser encontrada em: <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/13062> (acesso em 03 de setembro de 2021).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nosso trabalho se fundamentou, principalmente, em pesquisas recentes a respeito do Ensino Remoto, na Modelagem Matemática e na Educação Matemática no Ensino Superior. Apresentaremos a seguir, de forma breve, um pouco dessas ideias.

Pesquisas que estudam a aprendizagem na disciplina ED identificam problemas como dificuldades relacionadas a conteúdos anteriores, seja da Matemática Básica, seja do Cálculo, além do foco em resoluções analíticas e manipulações algébricas (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013). Essas pesquisas sugerem um menor destaque nos aspectos algébricos das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e um aumento do uso das aplicações, de uma maneira contextualizada, com problemas reais, i. e., um equilíbrio entre as resoluções analíticas, numéricas e gráficas. Acrescentamos a esse enfoque mais qualitativo das EDO, o uso de metodologias diferentes, como a Modelagem. Além disso, como foi nosso propósito inicial, a condução da Modelagem pode ser feita de uma maneira a contribuir para uma visão mais crítica a respeito do uso da Matemática e suas aplicações.

A pandemia de COVID-19, que se instalou no ano de 2020 trouxe à tona diversos problemas educacionais, além de provocar outros problemas sociais e pessoais. Assim, as circunstâncias provocadas pela pandemia aumentaram a relevância da Educação Matemática



Crítica que afirma que a Matemática não é neutra (ENGELBRENCH *et al*, 2020). Dessa forma, é importante repensar o papel que a Matemática exerce na sociedade e fazer uma discussão crítica a esse respeito (LOPES, 2020b, 2021). Por exemplo, a quarentena ocasionada pela pandemia evidenciou desigualdades sociais e econômica dos alunos no ensino remoto.

METODOLOGIA

As atividades foram produzidas tendo em vista a perspectiva de Modelagem Matemática de Bassanezi (2002) e estruturada na perspectiva educacional por Biembengut (2016). Biembengut (2016) descreve três fases para que a Modelagem seja conduzida em uma sala de aula: a) Percepção e assimilação; b) Compreensão e explicitação; c) Significação e expressão. Especialmente, na etapa de significação e expressão, etapa (c), o modelo produzido é destacado de uma forma sintética por meio de uma linguagem simbólica (BASSANEZI, 2002).

As atividades foram realizadas com 117 alunos de diferentes Engenharias durante os meses junho e julho de 2020. Esses alunos se dividiram em grupos de 4 a 6 pessoas, totalizando 20 grupos. Cada grupo realizou duas modelagens, sendo uma modelagem envolvendo EDO de 1ª ordem (escolhida entre duas do 1º bloco) e a segunda, envolvendo EDO de ordem superior (escolhida entre duas do 2º bloco). Os temas foram:

1º bloco: 1A) Ingestão de bebida alcóolica e o risco de acidentes

1B) Adequação de uma dieta

2º bloco: 2A) Como um consumidor se comporta ao realizar compras

2B) Propagação de uma epidemia

Os temas das atividades foram escolhidos com o fim de facilitar as discussões críticas e conexões com a realidade, além de serem temas que julgamos motivadores para a maioria dos alunos. A inspiração para esses temas foi, principalmente, um livro que traz diversas sugestões de Modelagens com Equações Diferenciais (BURGHES; BORRIE, 1981). O desenvolvimento das Modelagens se deu por meio de Passos, conforme sugerido por Laudares *et al*. (2017). Aos 8 Passos sugeridos acrescentamos 2, com o fim de facilitar a discussão e reflexão crítica tanto da adequação do modelo com a realidade, quanto às suas possíveis implicações sociais (veja



mais adiante a breve descrição da Modelagem 2A). Apresentamos, a seguir, o Produto Educacional elaborado por ocasião da pesquisa aqui relatada. Apresentamos de uma forma breve os detalhes de uma modelagem realizada.

PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional “Atividades de Modelagem Matemática para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias” contém as quatro atividades de Modelagem. Ele é voltado para professores que lecionam essa disciplina. As atividades foram produzidas com o intuito de auxiliar os alunos a uma reflexão crítica em cima de situações/problemas do cotidiano de uma pessoa ou relacionados com a sociedade. O produto pode ser encontrado em: <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/13062> (acesso em 03 de setembro de 2021).

Ilustramos o conteúdo do produto educacional por meio de uma modelagem, conforme apresentamos a seguir. Resumidamente, apresentamos o problema em questão, damos algumas sugestões práticas para que o grupo faça pesquisas adequadas ao modelo descrito. Em seguida, fornecemos exemplos de perguntas que podem auxiliar na discussão da adequação do modelo com a realidade e em uma discussão crítica a respeito dos processos decisório para elaboração do modelo e das possíveis influências sociais que ele pode exercer.

Modelagem 2A: Comportamento de compra do consumidor

Problema: Elaborar um modelo matemático que mostre a motivação e o nível de compra de uma certa marca e como isso evolui com o passar do tempo.

EDO envolvida: Estamos considerando o processo de escolha de um consumidor de uma forma individualizada e, daí, elaboramos um modelo que descreva e preveja o comportamento desse consumidor em relação a um certo produto, de a uma certa marca, que chamaremos de X. As variáveis principais, em função do tempo t , em relação a esse produto X são:

- $B(t)$: nível de compra.
- $M(t)$: motivação (e atitude).



- $C(t)$: nível de comunicação (como *marketing*).

Essas variáveis são relacionadas pelas seguintes equações:

$$\frac{dB}{dt} = b(M - \beta B), \quad e, \quad \frac{dM}{dt} = a(B - \alpha M) + \gamma C,$$

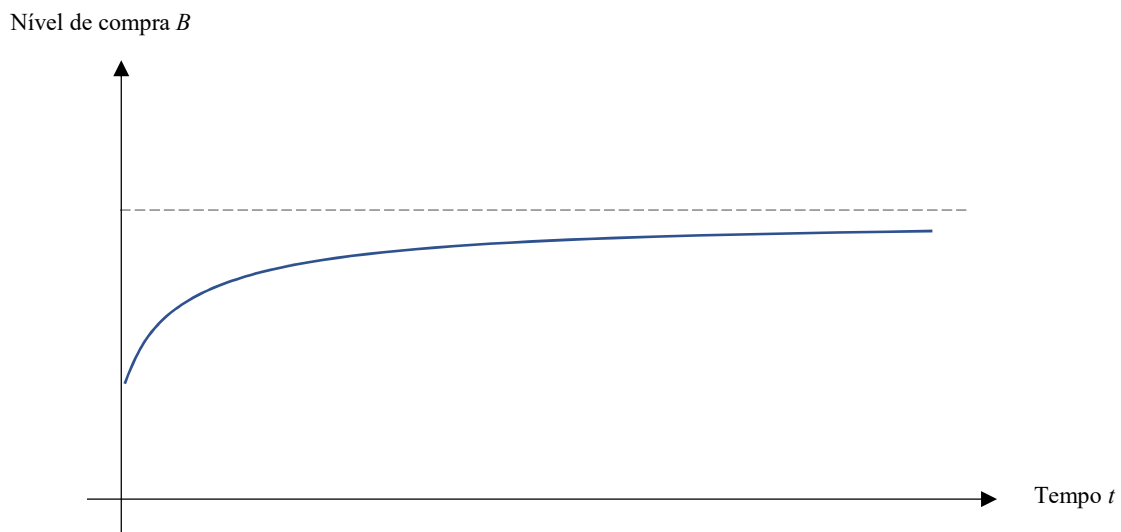
em que α, β, γ, a e b são constantes positivas.

Dessa forma, temos um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (um sistema 2x2). Apesar disso, não precisamos recorrer às técnicas de resolução de sistemas de equações diferenciais, pois podemos substituir a variável M da segunda equação na primeira equação. Para isso, derivamos a primeira equação e substituímos M' na equação de B'' . Assim, obtemos:

$$\frac{d^2B}{dt^2} + (b\beta + a\alpha)\frac{dB}{dt} + ab(\alpha\beta - 1)B = b\gamma C$$

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem que relaciona o nível de compra de um certo produto X ao nível de comunicação C . Para resolver essa equação, precisamos de obter uma solução particular e uma solução da parte homogênea. A solução geral é a soma dessas duas soluções. Observe que, para a solução particular, é importante saber o sinal de $(\alpha\beta - 1)$. Ou seja, o nível de compra se divide em dois casos: quando $\alpha\beta > 1$, e quando $\alpha\beta < 1$ (veja Figura 1).

Figura 1: Nível de compra (para $\alpha\beta > 1$)



Fonte: Adaptado de Burghes e Borrie (1981).



Sugestão: Cada grupo formado pode escolher uma determinada marca ou produto a fim de encontrar as constantes e substituir na equação do problema. Também, o grupo pode analisar o que algumas pessoas (como colegas da faculdade ou parentes) pensam a respeito dessa marca/produto (aqui está uma boa oportunidade para uma breve pesquisa de campo).

Discussão do modelo: Esse modelo é aplicável para itens de consumo constante (como comida) e para itens de longa duração (como uma geladeira)? Seria esse modelo válido para descrever compras realizadas tanto pela internet quanto de forma presencial? Esse modelo poderia ser aplicado para empresas que possuem algum monopólio? Como incluir possíveis descontos?

Discussão crítica: De que maneira as estratégias de venda das empresas influenciam o apego emocional das pessoas a um certo produto? Quais as possíveis implicações do marketing direcionado para um grupo específico, como aqueles que são direcionados para crianças? De que maneira as estratégias de venda das empresas influenciam as pessoas de baixa renda, provocando um endividamento, às vezes desnecessário? Até que ponto o governo poderia/deveria intervir nas campanhas de marketing das empresas?

CONCLUSÕES

O ensino de EDO por meio de Modelagem foi algo que trouxe uma motivação para a aprendizagem. A maioria dos alunos ficaram satisfeitos por poderem aplicar o conteúdo estudado em situações práticas. Mesmo com as dificuldades matemáticas encontradas, as expressões dos alunos foram muito positivas. Por outro lado, alguns alunos pediram a ajuda de um “orientador” durante o processo de obtenção do modelo, mesmo tendo diversas ajudas, como o professor, o monitor da disciplina e a facilitação por meio das etapas da Modelagem, os “Passos” mencionados anteriormente.

Em relação à criticidade, notamos que os alunos conseguiram relacionar o modelo com situações vivenciadas no cotidiano. Alguns observaram que a Matemática não é neutra e decisões feitas por governos e empresas são baseadas na Matemática, o que pode esconder intenções e interesses particulares.

A pandemia provocou diversas mudanças. Essas mudanças foram em diversas áreas. É de se esperar que as instituições de ensino repensem o futuro da educação. O que irá predominar



futuramente, o ensino remoto ou um ensino híbrido? Ou será que voltaremos como estávamos antes da pandemia, sem nenhuma alteração?

Ao olhar para frente, vislumbrando o futuro da Educação Matemática, em particular o Ensino Superior, podemos afirmar que nossa pesquisa trouxe algumas possibilidades para o ensino, em especial o ensino remoto, por meio de recursos digitais para a disciplina ED. Apesar disso, percebemos, infelizmente, que o isolamento social evidenciou alguns aspectos sociais, como diferenças socioeconômicas de alguns alunos, o que foi apresentado por meio das dificuldades em adquirir recursos tecnológicos e a desistência de outros.

Uma sugestão para pesquisas futuras é o estudo das adaptações feitas pelos alunos e suas famílias durante o período de ensino remoto, assim como as implicações desse ensino para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. L. Pesquisa brasileira sobre modelagem em educação matemática. **ZDM Educação Matemática** 42, 337-348, 2010. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/s11858-010-0238-9>>, acesso em 03 de setembro de 2021.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.
- BURGHES, D. N.; BORRIE, M.S. **Modelling with Differential Equations**, 1 ed. Chichester: Ellis Horwood, 1981.
- CAMPOS, I. S. **A divisão do trabalho no ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática segundo a Educação Matemática Crítica**, 255 f. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018. Disponível em <<http://hdl.handle.net/1843/BUOS-AWKKZY>>, acesso em 03 de setembro de 2021.
- ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C.; LLINARES, S.; KAISER, G. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? **ZDM Mathematics Education**, 52, p. 821–824, 2020.
- GEIGER, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. *In*: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO, F. R.; STILLMAN, G. (eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**, v. 1, Dordrecht: Springer, 2011. p. 305-314. Disponível em <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31>, acesso em 03 de setembro de 2021.



KAISER, G. **Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation**. Festband für Werner Blum, Eds. Hildesheim: Franzbecker, 99-108, 2005.

KAISER, G.; BRAND, S. Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences**. Springer, 2015, pp. 129-149.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F.; REIS, J. P. C.; FURLETTI, S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace: análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas e atividades com softwares livres**. 1 ed. Belo Horizonte: Artesã, 2017.

LOPES, A. P. C.; REIS, F. S. Vamos viajar? – uma abordagem da Aprendizagem Baseada em Problemas no Cálculo Diferencial e Integral com alunos de Engenharia. **Revista de Educação Matemática**, v. 16, n. 23, p. 449-469, 2019. Disponível em <<https://doi.org/10.25090/remat25269062v16n232019p449a469>>, acesso em 03 de setembro de 2021.

LOPES, A. P. C. **Uma experiência de Modelagem Matemática no ensino remoto de Equações Diferenciais para cursos de Engenharia**. 2020. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020a. Disponível em <<http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/13062>>, acesso em 03 de setembro de 2021.

LOPES, A. Formação crítica dos professores de Matemática articulada às questões contemporâneas. **RENCIMA** v. 11, n. 6, p. 809-817, 1 out. 2020b. Disponível em <<https://doi.org/10.26843/rencima.v11i6.1901>>, acesso em 03 de setembro de 2021.

LOPES, A. P. C. Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. **RENCIMA**. V. 12, n. 6, 2021.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em modelagem matemática e diferentes tendências em educação e em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática**, 26(43), 89-110, 2012. Disponível em <<https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300006>>, acesso em 3 de setembro de 2021.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, v. 4, p. 1-24, 2013.

REIS, F. S.; COMETTI, M. A.; SANTOS, E. C. Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. **RENCIMA**, v. 10, n. 2, p. 15-29, 2019.